

有限要素法에 의한 電磁레일건의 電流分布解析

具 泰 萬

電 氣 工 學 科

(1986. 9. 30 접수)

〈要 約〉

電磁레일건에서 레일과 전기기 사이에 일정한 相對速度가 있는 경우의 磁束分布를 有限要素法으로 解析하고 이를 바탕으로 电流分布를 구하였다. 解析의結果는 解析的인 方法에 의한 것과 같이, 相對速度에 의한 効果를 잘 說明해 주고 있다. 그리고 레일과 전기기 境界面에서의 結果는 有限要素法에 의한 結果가 解析的인 方法에 의한 結果보다 略當竹이 있는 것으로 判斷되었다. 그러나 相對速度가 增加함에 따라 훨씬 많은 要素數를必要로 하였다.

Current Distribution Computations of an Electromagnetic Railgun Using Finite Element Method.

Koo, Tae-Man

Dept. of Electrical Engineering

(Received September 30, 1986)

〈Abstract〉

This paper deals with the current distributions of an electromagnetic railgun with the relative motion between rails and armature by finite element method. The numerical results account fully for the effect caused by the relative motion as an analytic solution, and it is considered that the numerical results are more reasonable than the analytic results, but, as the relative speed increases, the more numbers of elements are needed to obtain reasonable solutions.

I. 序 論

最近에 이르러 電磁에너지기를 利用한 EML(Electromagnetic Launcher)의 實用化研究가 활발히 進行되고 있다. EML은 다른 에너지를 利用하는 것에 비하여 짧은 加速距離로 큰 速度를 얻을 수 있고 化學에너지의 利用한 경우 必然의으로 發生하는 公害物質이 없이 약으로 原子力產業, 軍事產業, 宇宙開發 등에 利用될 것으로 展望된다.^(1~4) EML에는 Mass Driver, Pulsed Induction Accelerator, Coaxial Launcher, Railgun 등이 있으나 짧은 加速距離에서 큰 速度를 얻기 위해서는 레일건이 가장 적절하다. 그러나 레일건은 짧은 시간 동안 MW~GW 級의 電力を 大電流로 공급해야 한다. 수 msec 단위에 $10^5 \sim 10^6$ A의 电流가 流하는 導體에 움직이는 磁束을 포함하고 있어 강연적으로 表皮効果의 速度起電力이 电流分布를 不均一하게 한다.^(5~7) 电流分布의 不均一은 回路의 實効抵抗을 増加시켜 効率을 低下시키고 局部加熱을 招來한다. 따라서 电流分布에 대한 研究가 要望된다.⁽⁸⁾

한편, 컴퓨터의 發達에 따라 1960년대 後半期부

터 電磁에너지變換機器의 電磁界特性解析에 有限要素法이 利用되기 시사하였는데 그 결과가 本래의 數值解法에 비하여 우수하나는 것이 입증되어 現在에는 이 方法이 많이 利用되고 있다. ^(8~10) 이러한 관점에서 本研究에서는 有限要素法을 利用하여 本 일전에서 超高速으로 移動하는 電機子境界面 부근의 磁束分布를 求하고 이것으로 부터 電流分布를 解析하여 解析的 方法에 의한 結果와 比較検討함으로써 보다 정확한 電流分布를 光明하고자 한다.

II. 解析모델

Fig. 1은 레일전에서 레일과 電機子의 構造를 나타낸 것이다.

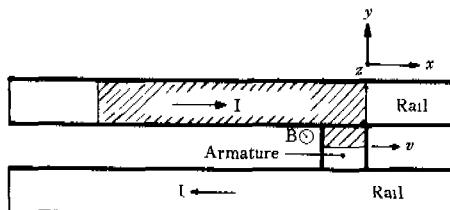


Fig. 1. Armature-Rail Configuration.

레일전은 電機子를 中心으로 上下對稱이므로 上層析半(빛금친 부분)을 解析領域으로 하였다. 실제로는 電機子가 움직이나 레일을 基準으로 하는 것보다 電機子를 基準으로 하는 것이 解析이 용이하므로 電機子를 基準으로 하였다. 즉, 電機子는 固定되어 있고 레일이 오른쪽에서 左쪽으로 움직이는 셈이 된다. 따라서 座標系의 基準點은 電機子 内面의 中心點이 된다.

二次元 모델로 定常狀態에서 磁束分布를 通하여 電流分布를 解析하고자 하므로 다음과 같은 假定을 두었다.

- (1) 레일과 電機子는 Z 축 방향으로 무한히 연장되어 있고 相對運動은 X 축 방향으로만 존재한다.
- (2) 레일과 電機子의 内部表面의 磁束密度는一定하다.
- (3) 레일과 電機子의 外部表面의 磁束密度는零이다.

本 解析모델에서 任意의 點에서 磁束密度를 구하려 그 값으로 부터 電流分布를 解析할 수 있다. 즉 $\int_{\mu}^B dI = I$ 에 의하여 磁束密度 B 의 값으로 부터

電流 I 의 分布를 구할 수 있다.

III. 基本方程式

解析모델에 適用되는 方程式은 다음의 Maxwell의 電磁方程式으로 부터 誘導된다.

$$\begin{aligned}\nabla \times H &= i \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times (V \times B) \\ i &= \sigma E\end{aligned}\quad (1)$$

여기서 H 는 磁界, i 는 電流密度, E 는 電界, B 는 磁束密度, σ 는 導電率, μ 는 透磁率이며 變位電流는 없는 것으로 한다.

式(1)로 부터

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times H \right) \\ &= \frac{1}{\sigma \mu} \nabla \times \nabla \times B \\ &= \frac{1}{\sigma \mu} [\nabla (\nabla \cdot B) - \nabla \cdot (\nabla B)] \\ &\quad - \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 B\end{aligned}$$

마지막 다음 式이 成立된다.

$$\nabla^2 B = \sigma \mu \frac{\partial B}{\partial t} - \sigma \mu V \frac{\partial B}{\partial x} \quad (2)$$

定常狀態의 解를 얻고자 하므로 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 는 무시할 수 있고, 電機子는 固定되고 레일이 移動하는 것이 되므로 레일에 適用되는 式은

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = -\sigma \mu V \frac{\partial B}{\partial x} \quad (3)$$

이에 電機子에 適用되는 式은

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

가 된다.

IV. 有限要素法의 適用 ^(9~11)

1. 磁束密度 B 의 近似化

有限要素法을 利用하여 磁束密度에 대한 方程式을 인기 위하여 다음과 같이 磁束密度를 近似化하였다.

$$B(x, y) \approx \tilde{B}(x, y) = N_i(x, y)B_i \quad (5)$$

여기서 N_i 는 構成函數(Interpolation Function)이다. 要素는 解析하고자 하는 境界에 잘 符合시킬 수 있는 三角要素로 하여 각 要素마다 一次 試驗函

數를 取하였다. 따라서 近似化시킨 磁束密度 \tilde{B} 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\tilde{B}(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y \quad (6)$$

이 近似化된 \tilde{B} 를 三角要素의 각 頂點에서의 磁束密度 B_i 로 나타내면

$$\tilde{B}(x, y) = L_1 B_1 + L_2 B_2 + L_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 L_i B_i \quad (7)$$

이어, 여기서 L_i 는 自然座標系를 나타내며 다음과 같다.

$$L_1(x, y) = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y)$$

$$L_2(x, y) = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 x + c_2 y) \quad (8)$$

$$L_3(x, y) = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y)$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

단, x_i, y_i 는 要素의 頂點 i 의 x, y 座標값이다.
Fig. 2는 三角要素의 自然座標系를 나타낸다.

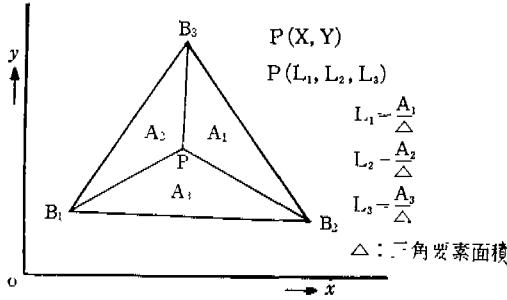


Fig. 2. Natural co-ordinates for triangular element.

式(5), 式(7)을 살펴보면 三角要素의 一次 試驗函數에 시의 條間函數는 각 頂點에 대한 線型自然座標와 같게 된다. 즉, 다음 式이 성립한다.

$$\begin{aligned} B(x, y) &\approx \tilde{B}(x, y) = \Sigma N_i(x, y) B_i \\ &= \Sigma L_i(x, y) B_i \end{aligned} \quad (9)$$

2. Galerkin 理論適用과 要素方程式

要素方程式은 誘導하는 方法은 여러 가지가 있으나 주로 變分原理(Variational Approach)의 Galerkin 理論을 適用하는데 Galerkin 理論은 初期值 혹은 境界值問題에 무리 없이 適用되기 때문에 要素

方程式이 간편하게 誘導되어 效果的이다.

Galerkin 理論의 概念的 原理를 보면

$$L(\phi) - f = 0 \quad (10)$$

로 表示되는 偏微分方程式에서

$$\phi = \Sigma N_i \phi_i \quad (11)$$

로 近似化시킨 界變數 ϕ 를 原式에 代入하면

$$L(\phi) - f - R \neq 0 \quad (12)$$

이 된다. 여기서 R 은 残差(Residual)이다. R 을 解析하고자 하는 소 領域 Ω 에서 零 또는 最小가 되게 하는 加重函數(Weighted Function) W_i 를 假定하면 다음과 式이 되는데

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (L(\phi) - f) W_i d\Omega \\ &= \int_{\Omega} RW_i d\Omega = 0 \quad (\text{또는 最小}) \end{aligned} \quad (13)$$

Galerkin 理論은 條間函數 N_i 를 加重函數 W_i 로 使用하는 方法으로 다음과 같이 定義된다.

$$\int_{\Omega} (L(\phi) - f) N_i d\Omega = 0 \quad (14)$$

磁束密度 B 를 式(7)과 같이 近似化시켜 Galerkin 理論으로 展開하면 例일에서는 각 要素마다 다음 式이 適用되고

$$\int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial y^2} + \mu \sigma V \frac{\partial B}{\partial x} \right) L_i dxdy = 0 \quad (15)$$

電機子에서는 각 要素마다 다음 式이 適用된다.

$$\int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial y^2} \right) L_i dxdy = 0 \quad (16)$$

그런데 式(16)은 式(15)에서 $V=0$ 인 경우이므로 式(15)에 대 한 要素方程式을 誘導한 후 $V=0$ 를 代入하면 式(16)에 대 한 要素方程式이 되므로 별도로 要素方程式을 誘導할 必要가 없다. 式(15)를 각 項別로 나누어 쓰면

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial y^2} \right) L_i dxdy \\ &+ \mu \sigma V \int_{\Delta} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} L_i dxdy = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)의 左邊의 첫 項에 대해 部分積分을 행한 후 Stokes의 定理를 適用하면

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial y^2} \right) L_i dxdy \\ &- \int_{\Delta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} L_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial y} L_i \right) \right\} dxdy \\ &- \int_{\Delta} \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} \right) dxdy \\ &- \int_{\Delta} \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} \right) dxdy \\ &+ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial y} n_y \right) L_i d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

이 된다. 여기서 Ψ 는 要素의 全 境界이고 n_x, n_y 는 法線方向 單位ベクト이다. 要素의 全 境界에서 磁束의 方向導函數成分의 합은 零이므로 式(17)은 다음과 式으로 된다.

$$\begin{aligned} \mu\sigma V \int_A \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} L_i dx dy \\ - \int_A \left(\frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

近似化시킨 磁束密度 \tilde{B} 를 利用하여 式(19)를 整理하면 다음 式이 된다.

$$\begin{aligned} -\mu\sigma V \sum_{i=1}^3 \int_A \frac{\partial L_i}{\partial x} L_i B_i dx dy \\ + \sum_{i=1}^3 \int_A \left(\frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_i}{\partial y} \right) B_i dx dy \\ = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)을 整理하여 매트리스 形態로 表現하면 다음과 같다.

$$[N] \{B\} = \{0\} \quad (21)$$

단,

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \int_A \left(\frac{\partial L_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial L_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial y} \right) dx dy \\ &- \sigma\mu V \int_A \frac{\partial L_i}{\partial x} L_j dx dy \\ &- \int_A \left(\frac{b_i}{2A} \cdot \frac{b_j}{2A} + \frac{c_i}{2A} \cdot \frac{c_j}{2A} \right) dx dy \\ &- \frac{\mu\sigma V b_i}{2A} \int_A L_j dx dy \\ &= \frac{1}{4A} (b_i \cdot b_j + c_i \cdot c_j) - \frac{1}{6} \mu\sigma V b_i \end{aligned} \quad (22)$$

그러므로 解析할리고 하는 全領域의 三角要素에서 成立하는 要素方程式은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} k_1(b_1b_1+c_1c_1)-k_2b_1 & k_1(b_1b_2+c_1c_2)-k_2b_1 \\ k_1(b_2b_1+c_2c_1)-k_2b_2 & k_1(b_2b_2+c_2c_2)-k_2b_2 \\ k_1(b_3b_1+c_3c_1)-k_2b_3 & k_1(b_3b_2+c_3c_2)-k_2b_3 \\ k_1(b_1b_3+c_1c_3)-k_2b_1 & k_2b_1 \\ k_1(b_2b_3+c_2c_3)-k_2b_2 & k_2b_2 \\ k_1(b_3b_3+c_3c_3)-k_2b_3 & k_2b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{단, } k_1 = \frac{1}{4A}, \quad k_2 = \frac{1}{6} \mu\sigma V$$

式(23)의 各 係數는 三角要素節點의 位置, 要素의 物理的 性質, 電機子의 運度에 의해 주어지며 未知數는 三角要素節點의 磁束密度이다. 全 解析領域에 關して 義性있게 解析하기 위하여 모든 要素方程式을 組合하여 다음의 系方程式를 構成하였다.

$$[S] \{B\} = \{0\} \quad (24).$$

여기서 $[S]$ 는 $(n \times n)$, $\{B\}$ 는 $(n \times 1)$ 의 行列이며 n 은 解析領域의 總節點數이다. 行列 $[B]$ 를 未知節點值 $\{B_{10}\}$ 과 境界條件에 의한 수이기는 眞知節點值 $\{B_{20}\}$ 로 表現하면

$$\begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{B_{10}\} \\ \{B_{20}\} \end{bmatrix} = \{0\} \quad (25)$$

이 되고 이를 未知節點值 $\{B_{10}\}$ 에 대비 整理하면

$$[S_{11}] \{B_{10}\} = -[S_{12}] \{B_{20}\} = \{F\} \quad (26)$$

이되어 未知節點의 磁束密度 $\{B_{10}\}$ 를 구할 수 있다.

V. 結果考察 및 檢討

選定된 解析모형을 解析하기 위하여 Fig. 1의 解析領域(AGMA 철 부분)을 Fig. 3과 같이 要素分割하였으며 要素數는 930個, 節點數는 512個로 하였다.

本論文에 通用한 테일과 電機子의 치수 및 導電

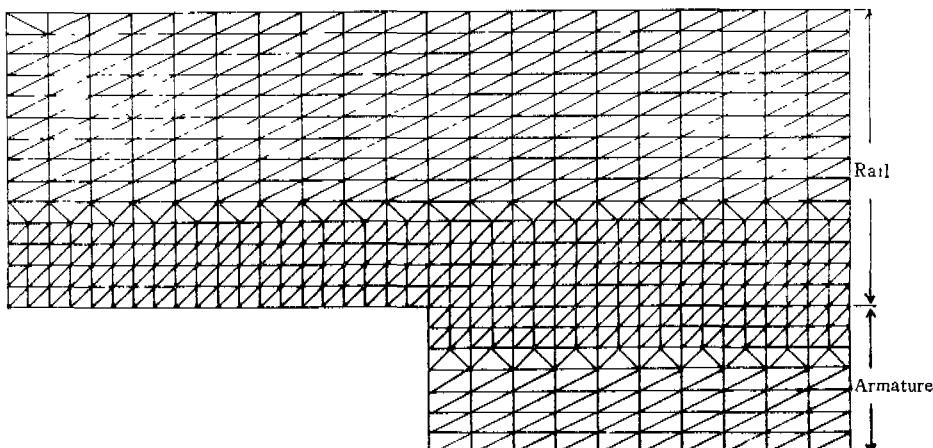


Fig. 3. Element subdivision.

率과 透磁率은 다음과 같다.

레일의 厚(y_0): 10mm, 5mm, 2.5mm

레일의 길이(解析領域의 길이): 60mm

電機子의 幅(y_a): 10mm

電機子의 길이(x_0): 10mm, 1mm

導電率(σ): $5.68 \times 10^7 \text{ S/m}$ (銅)

透磁率(μ): $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ (銅)

本 解析 모델에서는 $\int H dl = I$ 에 의하여 레일의 點에서 磁束密度를 단위값으로 B 라 하면 이 點에서 $B=0$ 되는 境界面까지 通過하는 電流는 단위값으로 B 가 된다. Fig. 4-a, Fig. 4-b 는 電機子의 移動速度에 따라 電機子 境界面에서의 磁束密度를 나타낸다.

Fig. 4-a, Fig. 4-b에서 電機子 移動速度가 빠를수록 레일과 電機子 境界面의 磁束密度가 크게變化하는데 이것은 速度가 빠를수록 電流集中現象이顯著함을 나타낸다. Fig. 4-a에서 境界面의 3% 범위에 흐르는 電流의 量을 比較해 보면 $v=300\text{m/sec}$ 에서는 全 電流의 65% 이상($B=0.35$ 이하), $v=1,000\text{m/sec}$ 에서는 全 電流의 80%, $v=3,000\text{m/sec}$ 에서는 全 電流의 90%가 흐르는 現象을 알 수 있다. 또 Fig. 4-a 와 Fig. 4-b를 比較해 보면 Fig. 4-b에서 磁束密度의 变化가 現象을 볼 수 있는데 이것은 電機子 길이가 短을수록 電流의 集中度가 現象을 나타낸다.

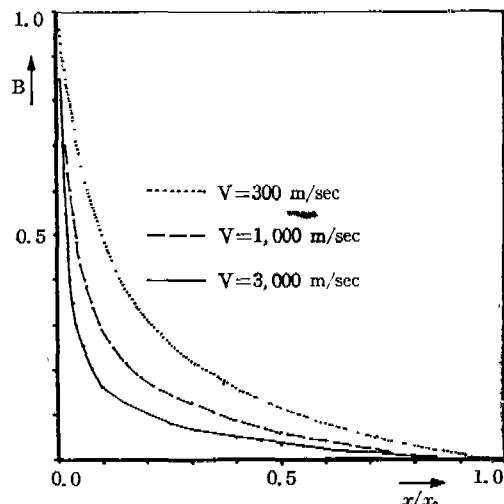


Fig. 4-b. Flux density at different velocity at the interface between rail and armature($y_0=2.5\text{mm}$, $x_0=1\text{mm}$).

이러한 結果는 Fig. 5-a, Fig. 5-b, Fig. 5-c에서 보는 바와 같이 解析的方法에 의한 結果⁽⁷⁾와類似하다. 그러나 有限要素法에 의한 解析은 解析的方法에 의한 것보다 레일과 電機子 境界面에서 假定을 設定하지 않는 농假定이 現象을 레일과 電機子의 境界面에서의 磁束分布는 有限要素法에 의한 解가 더 适当한 것으로 사료된다. 다만 레일의 磁束 distribution에서는 相對速度의 增加에 따라 要素數를

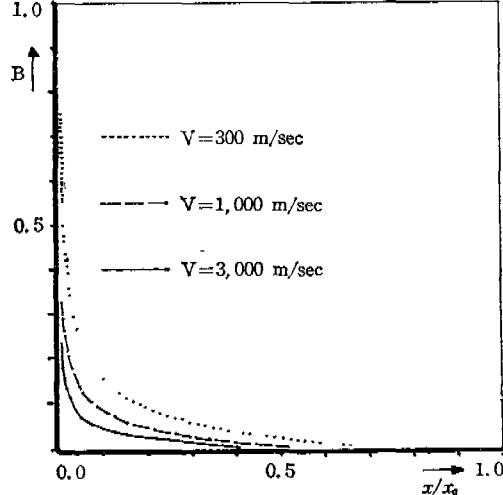


Fig. 4-a. Flux density at different velocity at the interface between rail and armature($y_0=10\text{mm}$, $x_0=10\text{mm}$).

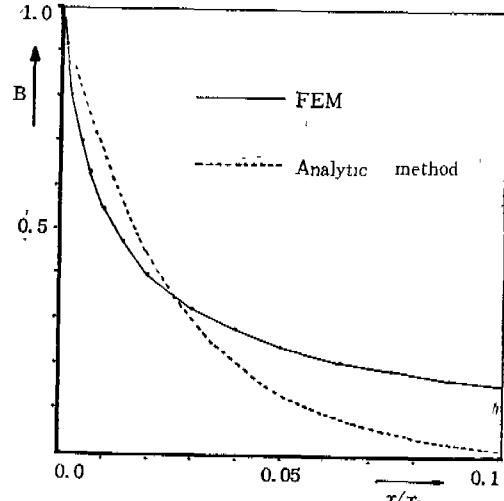


Fig. 5-a. Flux density at the interface between rail and armature($V=300\text{m/sec}$).

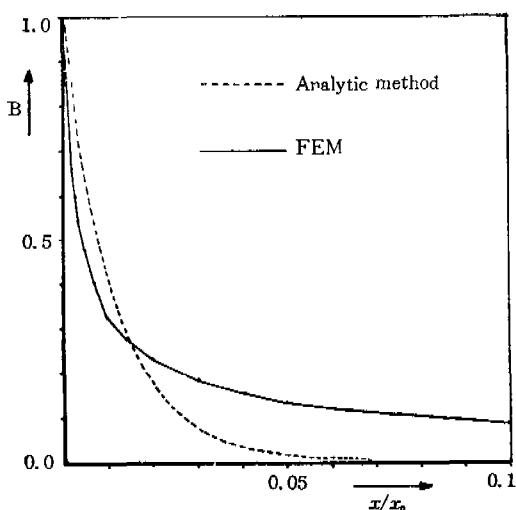


Fig. 5-b. Flux density at the interface between rail and armature($V=1,000\text{m/sec}$).

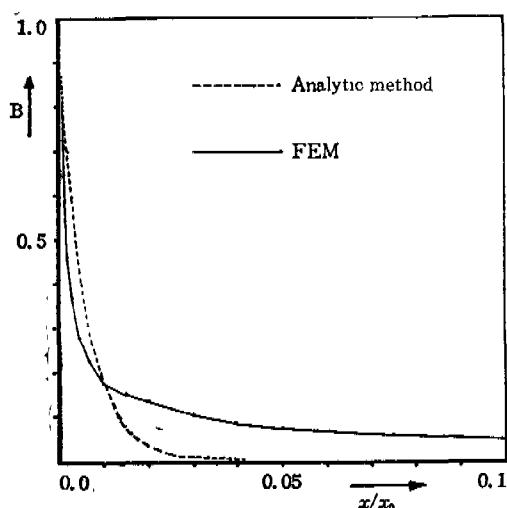


Fig. 5-c. Flux density at the interface between rail and armature($V=3,000\text{m/sec}$).

매우 브시 增加시켜야 하는 難點이 있다. 이것은 電子計算機의 性能과 直結되는 問題이므로 限界가 따른다. 電機子 左側의 레일境界面의 界面值는 쳐음 解析의 方法에 의한 값이 引用되었는데 이 界面值는 다소 다르게 適用되어도 界面值가 주어지는

부근을 제외하고는 별 영향을 미치지 못함을 알았다. 따라서 電機子의 이 부근의 電流分布는 電機子의 速度에 기의 좌우됨을 확인할 수 있었다. 또 레일의 幅의 變化가 電機子와 이 부근의 磁束分布에 별 영향을 주지 못함을 확인하였다. 이것은 電流가 한 곳에 集中되는 電機子 부근에서는 豫測할 수 있는 結果이다.

VI. 結論

有限要素法에 의하여 一定한 相對速度下에 있는 레일건의 定常狀態의 磁束 및 電流分布를 一次元 모델로 解析하였다. 그 結果는 解析의 方法에 의한 解와 類似하나 電機子 및 그 境界面의 磁束 및 電流分布는 解析의 方法에 의한 解보다 合當한 것으로 판단된다. 이러한 結果는 레일건의 시뮬레이션 프로그램 開發과 레일건의 設計에 도움을 줄 것이며 高速으로 움직이는 보여기의 電流分布를 理解하는 데 努力이 될 것이다.

참고文獻

- Henry Kolm et al., 'Electromagnetic Launchers', IEEE MAG Vol. MAG-16, pp. 719-721, 1980.
- R. S. Hawke, 'Railgun Accelerators for Gram-Sized Projectiles', IEEE NS Vol. NS-28, pp. 1542-1544, 1981.
- Harry D. Fair, Jr., 'Electromagnetic Propulsion: A New Initiative', IEEE MAG Vol. MAG-18, pp. 4-6, 1982.
- Henry Kolm et al., 'An Alternative Launching Medium', IEEE Spectrum, pp. 30-36, Apr. 1982.
- Richard A. Marshall, 'Current Flow Patterns in Railgun Rails', IEEE MAG Vol. MAG-20, pp. 243-244, 1984.
- F. J. Deadrick et al., 'MAGRAC-A Railgun Simulation Program', IEEE MAG Vol. MAG-18, pp. 94-104, 1982.
- 貝泰萬, '電磁레일건의 磁界 및 電流分布解', UOU REPORT Vol. 17, No. 1, pp. 65-75, 1986.
- 任達鎬 外, '有限要素法에 의한 變壓器의 磁束分布 解析에 관한 研究', 大韓電氣學會誌, Vol

- 29, No. 4, pp. 247—255, Apr. 1980.
- Analysis', John Wiley & Sons, 1976.
9. M. V. K. Chari, P. P. Silvester, 'Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems', John Wiley & Sons, 1980.
11. Kenneth H. Huberner, 'The Finite Element Method for Engineers', John Wiley & Sons, 1975.
10. Larry J. Segerlind, 'Applied Finite Element