연구논문집 제 7권 제 1호 p.19~24. 1976

Runge Kutta Method 를 이용한 평가지표에 관한 연구

이 쾌 희 · 정 천 석*
전기공학과

〈요 약〉

본 논문에서는 Runge Kutta Method를 사용하여 평가지표를 계산하고 또 시스템을 설계하는데 있어서 그 값을 최소화 시키는 시스템의 Parameter를 결정하는데 필요한 프로그래밍을 개발하였다.

3계 시스템에 한해서 설과를 냈지만 다른 경우에도 내동소이하게 이용할 수 있다.

A study for the Performance Criteria by Runge Kutta Method

Lee, Kwae Hi · Jung Chun Suk
Dept. of Electrical Engineering

〈**Abstract**〉

This study involves the computation result for the performance criteria by Runge Kutta Method and the programming of the determination of parameters which minimize the performance criteria, which is essential for the system design. This paper covers only third order systems but it will be applicable for other systems.

I. 서 론

자동제어 궤환회로를 설계하는 데 있어서 가장 중요시 되는 요소는 안정도, 감도, 확도, 과도응답 그리고 잡음 등이다. 어떤 시스템에는 어느 것이 두히 중요시 되지만 다른 시스템에서는 다른 것이 더 중요시 될 수 있다. 이 논문에서는 과도응답을 다루는데 있어 일반적으로 가장 많이 사용되는 평가지표에 대해 연구했다.

지금까지 평가지표에 관해서는 많은 연구가 있어 왔다.[(1)(2)(3)]

평가지표라 함은 어떤 시스템의 응답이 주어진 reference에 도달하는데까지 생기는 오차와 시간과의 관계를 나타내는 것으로 IAE, ITAE, ITSE, ISE, ISTAE, ISTSE 등 여러가지가 있다. 이러한 평가지표를 최소화하는데 시스템에 따라 더 중요시 되는 지표가 설정된다. 예를 들면 어떤 시스템의 과도기가 빨리 끝나버리는 경우는 ITAE보다 IAE를 최소로 하는 것이 좋고 비교적 과도기간이 긴 경우는 IAE 보다는 ITAE를 최소로 하는 것이 바람직하겠다. 본 논문에서는 ITAE 및 IAE를 Runge-Kutta 방법을 사용해서 구하는 방법 및 어떤 시스템을 설계하는 데 있어 그 지표들을 최소로 하기위한 Parameter를 결정하는 방법에 관해 알아보았다.

II. Runge-Kutta Method를 이용한 평가지표의 계산.

IAE (integral of the absolute maginitude of the error) s_1은

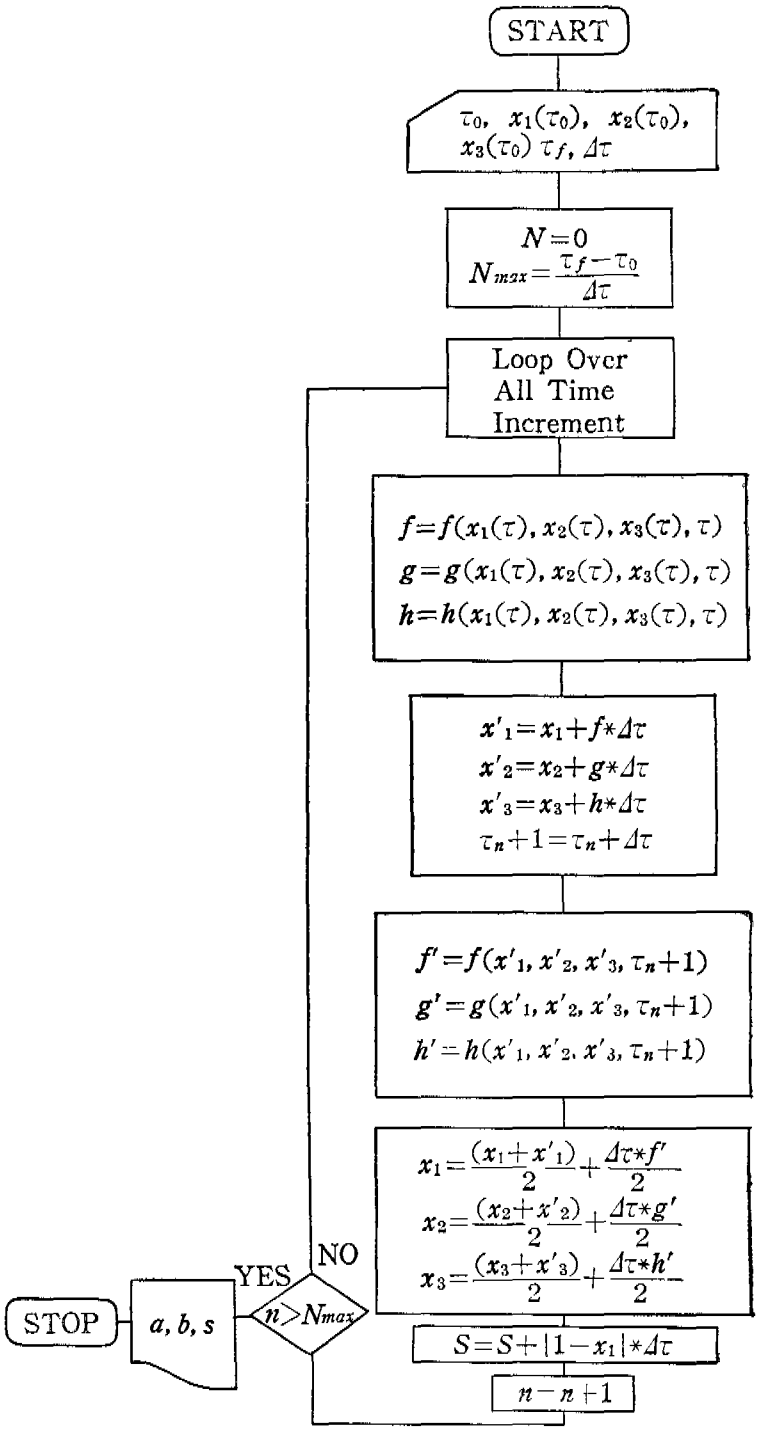
$$s_1=\int_0^\infty |e(t)|dt \quad \cdots\cdots(1)$$

ITAE(integral of time multiplied by the absolute value of error) s_2는

$$s_2=\int_0^\infty t|e(t)|dt \text{이다.} \quad \cdots\cdots(2)$$

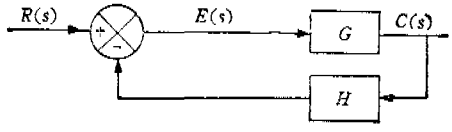
<그림 1>과 같이 표시되는 궤환회로의 전달함수는

* 전기공학과 강사



<그림 2. Runge-Kutta Method를 이용한 IAEF 계산 low-Char

$$C(s)/R(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$
$$=\frac{A_1s^l+A_2s^{l-1}+\cdots+A_ls+A_{l+1}}{B_1s^m+B_2s^{m-1}+\cdots+B_ms+B_{m+1}}\cdots\cdots(3)$$



<그림 1> 일반적인 궤환회로block diagram

로 되는데 이중 zero steady-state step input system[4] 중 3계인 경우에 관해 알아본다.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{w^3}{s^3+aws^2+bw^2s+w^3}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

이 시스템의 상태방정식은

$$x_1=c$$
$$\left.\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ x_2=x_3\\ x_3=-w^3x_1-bw^2x_2-awx_3+w^3r(t)\end{cases}\right\}\cdots\cdots(5)$$

$r(t)$가 unit step function인 경우

$$e(t)=u(t)-x_1(t)=1-x_1(t)\quad t\geqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

따라서 Runge-Kutta Method[5]를 이용해서 각 구간에서 $x_1(t)$를 구하면 (1)식 및 (2)식에서 s_1, s_2를 구할 수 있다. 이것에 대한 Flow-chart는 <그림 2>에 표시했다.

Ⅲ. 평가지수를 최소로 하기위한 parameter 결정

다음에 평가지수를 최소로하는 (4)식의 a, 및 b의 값을 결정해 보자.

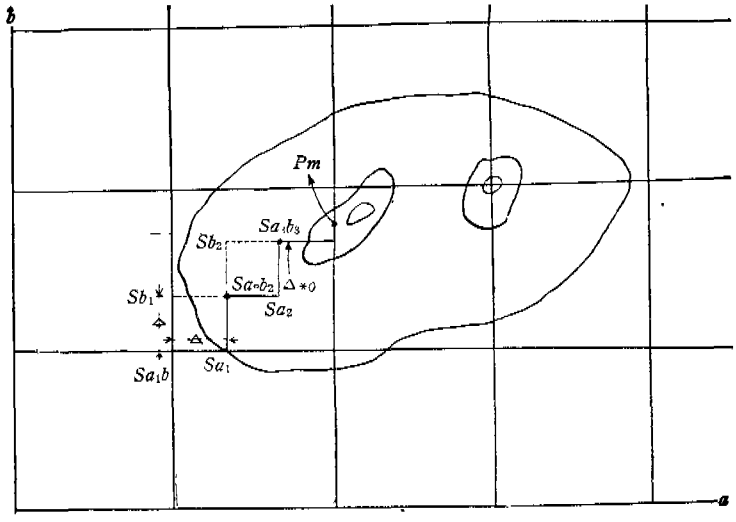
우선 이 시스템이 안정(stable)되기 위한 a, b의 조건은 Routh-Hurwitz criterion[6]을 적용해 보면 $a*b>1$이어야 한다. 여기서는 (1,1)을 출발점으로 한다. 출발점부터 minimum(or maximum) point를 찾아가는 방법은 여러가지가 있다.

<그림 3>과 같이 극점이 2개 이상 있을 경우 Monte-carlo Method를 사용하면 시간이 많이 걸리므로 여기서는 다음과 같은 가정을 하고 구간을 적당히 분할한 후 각구간내에서의 최소값을 구해 그 중 가장 작은 값을 나타내는 a및 b의 값을 결정했다.

<가정 1> 구간내에는 극점이 한 개이상 존재할 수 없다.

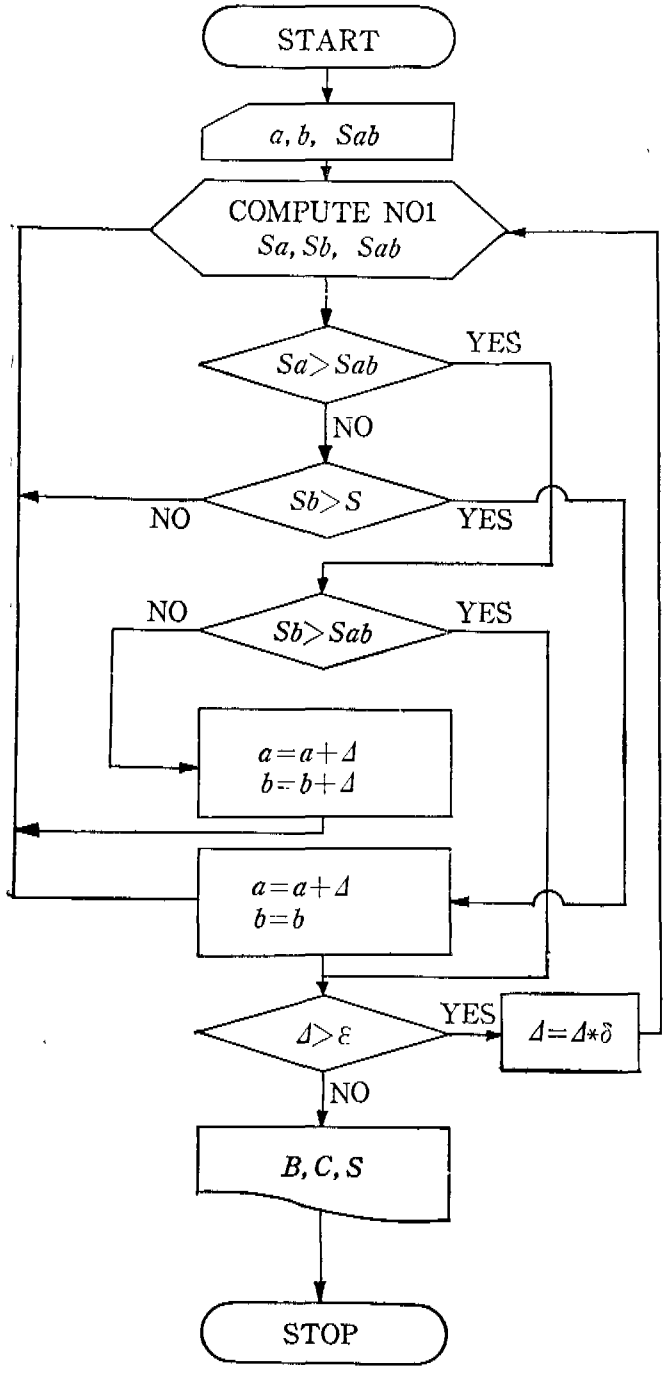
<가정 2> 극점은 어느 구간이외에서는 존재할 수 없다.

극점이 존재하는 영역이 출발점에서 멀리 떨어져 있을 경우 구간을 여러번 나누어야 하므로 시간이 오래 걸리게 된다. 그러나 이 논문의 경우에는 (5)식에서 a및 b가 커지면 x_3가 영이되는 시간이 길어



S_{a1b1} : 출발점 P_m : 최소점

<그림 3> 구간내에서 최소점을 구하는 방법

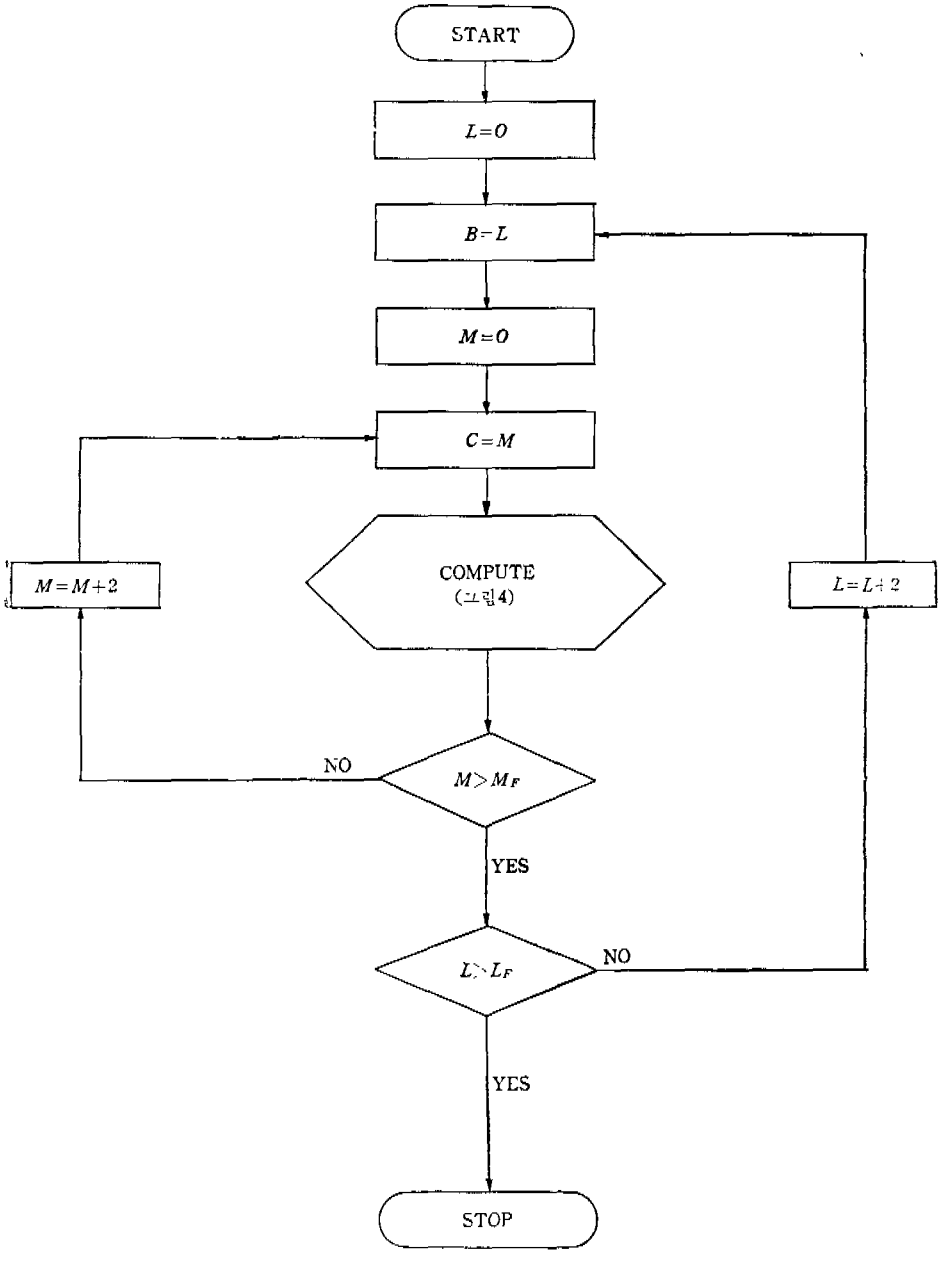


<그림 4> 구간내에서의 최소점을 찾는 Flow-Chart

지게 되므로 오차가 커진다. 또 $a*b>1$이라는 부등식이 있으므로 그다지 구간을 많이 나눌 필요는 없다.

실제 프로그래밍에서는 9개의 구간으로써 만족할 만한 결과를 얻었다.

각 구간내에서 최소점을 찾는 방법은 다음과 같다. 우선 출발점(a_1, b_1)에서 <그림 3>과 같이 a를 Δ만큼 변화시켰을 때의 s_1값을 s_{a1}, b를 Δ만큼 변화시켰을 때의 값을 s_{b1}, 출발점에서의 값을 s_{a1b1}이라 할때 s_{a1} 및 s_{b1}을 s_{a1b1}과 비교하여 값이 적어지는 방



<그림 5> Parameter를 결정하는 main Program의 Flow-Chart

한의 값은 택하여 s_{a252}를 선정한다. 다시 그림은 출발점으로 같은 과정을 되풀이 한다. 이때 극점이 존재하는 구간에서는 어느정도 이상 찾아간 후에는 값이 증가해 버리므로 (s_{a353})이때는 Δ를 $\Delta*\delta$로 감소시켜 같은 과정을 되풀이 한다. 그래서 Δ값이 ε보다도 작아지게 되면 그때의 δ값이 그 구간에서의 최소값이 된 것이다. 이상 설명한 것을 Flow-chart를 그리면 <그림 4>, <그림 5>와 같다.

IAE대신 ITAE를 최소화하는 Parameter를 구하는 경우에는 <그림 3>에서

$s=s+|E|*\Delta T$ 대신 $s=s+|E|*\Delta T*T$로 바꾸어 주면 된다.

이러한 방법으로 구한 결과 ITAE 및 IAE를 최소화시키는 a, b의 값을 <표 1>에 나타냈다.

<표 1> $w_n=1$일경우 a, b, s의 결과

	최 소 값	a	b
s_1	2.1523	1.5000	2.12500
s_2	3.18426	1.7500	2.15625

Ⅳ. 결 론

이상에서 우리는 Runge-Kutta 방법을 이용하여 ITAE 및 IAE를 computer로 계산하는 방법 및 그 값들을 최소로 하는 parameter를 결정하는 프로그래밍을 알아 보았다. 이 방법은 다른 분야 예를 들면 optimization하는 문제에 널리 적용할 수 있다. 단 구간이 매우 넓어져 있거나 parameter수가 여러개 있는 경우에는 계산시간이 매우 오래 걸리게 되므로 이러한 경우에는 사용하기가 어려워진다.

참 고 문 헌

1. SHINNERS, Stanley M., *Modern Control System Theory and Application*, pp. 174—178, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1972)
2. GARDNER, M.F. and BARNERS, J.L., *Transients in Linear Systems*, Vol. 1, Wiley, New York (1942)
3. GRAHAM, D. and LATHROP, R.C., *The synthesis of Optimal Transient Response*, AIEE Trans. 72, pp. 273 (1953)
4. SHINNERS, Stanley M., *Modern Control System Theory and Application*, pp. 176, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts (1972)
5. HILDEBRAND, F.B., *Advanced Calculus for Application*, pp. 102—105, Maruzen Company, Tokyo(1963)
6. KUO, Benjamin C., *Automatic Control Systems*, pp. 285—287, Prentice-Hall, New Jersey (1967)