

## 이산형 시스템에서의 최소차수의 관측자를 이용한 최적 레귤레이터의 개발\*

김 한 실

전기전자 및 자동화 공학부

### <요 약>

지금까지 단지 제한된 출력 즉 측정된 출력 값만을 사용하여 원하는 목표치에 도달하도록 하는 제어 문제를 푸는데 많은 연구가 진행되어 왔다. 차수가 줄여진 필터 알고리즘은 백색 잡음에 의하여 영향을 받은 선형 시스템의 상태를 추정하기 위하여 개발되었다. 추정자는 상태의 무편향성을 가정하고 또 추정자의 편차는 관측자 및 추정상태와 공통되는 상태의 모든 관측의 subspace에 수직이 된다. 특히 reduced-order에서의 필터 성능은 full-order에서의 필터 성능에 대해 suboptimal 이지만 상응한 Riccati equation을 푸는데 계산시간을 줄이고 memory를 덜 소요하는 이점이 있다. 본 논문에서는 Kronecker Algebra와 선택행렬을 이용하여 Non Linear Two Point Boundary Value Problem을 Linear Two Point Boundary Value Problem 으로 변환시켜 부수적으로 수반되는 algebraic Riccati equation을 유도함으로써 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

## A Design for Reduced-Order Observer Based Optimal Regulator in the Discrete System

Hansil Kim

School of Electrical Engineering and Automation

### <Abstract>

Researchers are often in solving control problems which are constrained to use only

\* 이 논문은 1997학년도 울산대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.

the available outputs. Unfortunately the desing of such controllers ofthen leads to a difficult Non Linear Two Point Boundary Value Problem. A reduced-order filter algorithm is developed for estimation of the complementary states of a linear system driven by white noise. The estimator gives an unbiased estimate of those states that are common to the observations and the estimated states. The filter performance is suboptimal relative to the full-order optimal linear filter, but benefits are reaped from computational savings in the filtering and associated Riccati equation. In this paper we are able to avoid such a design difficulty by solving the algebraic Riccati equation which is produced by converting a Non Linear Two Point Boundary Value Problem to Linear Two Point Boundary Value Problem with selecting matrix and Kronecker algebra. This paper extends the continuous version of feedforward gain control considered in [2] to a discrete setting.

Keyword : Non Linear Two Point Boundary Value Problem, Kronecker Algebra, feedforward gain, stack, disturbance rejection, tracking problem

## I. 서 론

백색 잡음에 의해 영향을 받는 선형 시스템에 있어서 Kalman Filter는 시스템의 모든 상태의 최적 선형 추정자를 얻는데 중요한 역할을 해 왔다. 그런데 reduced order 추정자의 문제는 단지 시스템의 제한된 상태에만 관심이 있을 때 일어난다. 특히 빨리 계산을 해야할 필요성이 있을 때 full order에 대해서 performance는 약간 손해를 보더라도 메모리의 양 및 계산 시간을 줄일 수 있는 reduced order 관측자를 이용한 최적 제어기의 설계는 필수적이다.

미지의 예기치 않은 잡음에 의해 영향을 받은 시스템을 제어하기는 쉽지 않다. 이런 시스템에 대하여 불규칙 선형 최적 추종 문제는 백색 잡음 때문에 시스템이 정확한 동작을 예측하는 것을 불가능하여 deterministic regulator 문제에서 처리하는 기법과는 근본적인 차이가 있다. 특히 최적 제어 입력  $u(t)$ 는 deterministic regulator 와는 달리 제어 주기  $[t_0, t_1]$  내에서 결정하는 것이 아니라 모든 가능한 정보를 이용하여 매 순간 마다 상황을 다시 고려해야 하는 것이다. 그러한 제어 규칙은 상태 변수가 항상 정확히 측정되어야 하는 것을 가정한다. 그렇지만 이것은 실현이 불가능하기 때문에 확률 변수 처리를 iterative하게 처리함으로써 출력 잡음을 걸러낸다.

본 논문에서는 2가지 문제 즉 reduced-order 최적 필터를 이용한 외란 제거와 관측자를 장착한 regulator 설계에 대하여 고려된다. 특히 시스템의 차수를 줄이면 이에 수반되는 목적함수의 최소 값이 차수를 줄이기 전보다 약간 크게 되지만 그보다 시스템의 차수를 줄임으로써 계산 시간과 기억 용량을 줄일 수 있는 장점이 있다.

기본적으로 제어 설계에 있어서 직면하는 시간영역에서 양방향에서 접근해 오는 해를 구하는 것이 필수적으로 해결해야 하는 과제이다. 이것을 행렬의 stack을 이용하여 구할 수 있으며 이를 이용한 적용분야로는 reduced-order Kalman 및 H infinity 필터 및 제어

기의 설계에 사용될 수 있으며 본 논문에서는 reduced-order Kalman Filter를 이용한 제어기의 설계에 응용하였다.

## II. 최소차수의 관측자의 설계

### II.1 시스템 모델

다음과 같은 선형 시스템 모델을 생각해 본다.

$$\begin{aligned} x(j+1) &= Ax(j) + Bu(j) + Dw(j) \\ y(j) &= Cx(j) + v(j) \end{aligned} \quad (2.1)$$

단 벡터  $x$ 는  $n$ -dimensional 시스템의 상태 변수이며 입력 제어 변수  $u$  및 출력 함수  $y$ 의 dimension은 각각 1 및  $m$ 이다.  $A, B, C$ 는  $x, u, y$ 에 상응하는 dimension을 갖는다. 그리고 시스템 잡음  $w$  와 출력 잡음  $v$  는 일반성을 잃지 않고 백색 잡음으로서 평균이 0 이고 분산이 각각  $Q$  및  $R$  이라고 가정한다.

$$\begin{aligned} E\{w(j)w^T(k)\} &= Q\delta_{jk} \\ E\{v(j)v^T(k)\} &= R\delta_{jk} \end{aligned} \quad \text{라 쓸 수 있다.}$$

여기서 전 상태 공간 벡터  $x$  에서 관심이 있는 상태  $z$  를 추출하기 위한 선택행렬을  $L$  이라고 하면 reduced order 상태는 다음과 같이 표시된다.

$$z = Lx$$

Reduced order 추정자 혹은 관측자  $\hat{z}$  의 상태 방정식 및 관측자 에러  $e$  는 다음과 같다.

$$\hat{z}(j+1) = F(j)\hat{z}(j) + K(j)y(j) + G(j)u(j) \quad (2.2)$$

$$e(j) = z(j) - \hat{z}(j) \quad (2.3)$$

그리고  $F, K$ , 및  $G$ 는 비 편향성 조건 ( $E\{e(j)\} = 0$ ) 을 만족시키는 적당한 크기를 가진 행렬이다. 여기서  $E$ 는 expectation operator 이다. 이후 비록 모든 시스템 변수 및  $F, K, G$  에 대한 time index는 시간에 대해 변하지만 표기상 생략해도 시간변수로 간주한다.

식 (2.3) 과 같이 에러를 정의하여 performance measure를 에러의 quadratic form으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J &= E \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} e^T(j)Q_e e(j) + e^T(N)S_e e(N) \right\} \\ &= \text{trace} \left[ \sum_{j=0}^{N-1} Q_e P_{ee}(j) + S_e P_{ee}(N) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

이 때  $Q_e, S_e$ 는 positive semidefinite 행렬이며  $P_{ee}(j) = E\{e(j)e^T(j)\}$  이다.

정의 1 : System (2.1)에서 reduced order 추정자를  $\hat{z}$  라고 하면 식 (2.4)에서의 performance measure  $J$ 를 최소화하는  $\hat{z}$ 를 구하는 문제를 Reduced-Order Observer라 한다.

## II.2 최소차수의 관측자가 존재하기 위한 조건

**정리 1 :** (비 편향성 조건)

식 (2.2) 에 주어진 reduced order 시스템 dynamics가 잡음에 대해 비 편향성을 가질려면 다음과 같은 조건을 가져야 한다.

$$FL + KC = LA \quad \text{그리고} \quad G = LB \quad (2.5)$$

$$\hat{z}(j) = E\{z(j)\} \quad (2.6)$$

(증명) 주어진 시스템 dynamics 모델은 다음과 같다.

$$z(j+1) = L x(j+1) = L (A x(j) + B u(j) + D w(j)) \quad (2.7)$$

식 (2.2)와 식 (2.7)에서 관측자 에러  $e(j+1)$ 은 식 (2.8)과 같이 주어진다.

$$e(j+1) = (FL + KC - LA)x(j) + (G - LB)u(j) + Fe(j) + LDw(j) - Kv(j) \quad (2.8)$$

여기서  $e(j+1)$  이  $x(j)$  및  $u(j)$ 와 비편향성이 될려면 최소한

$$FL + KC - LA = 0 \quad \text{그리고} \quad G - LB = 0 \quad \text{이어야 한다.}$$

또 잡음  $w(j)$  와  $v(j)$ 는 백색 잡음이므로  $E\{w(j)\} = E\{v(j)\} = 0$  이다. 따라서 식 (2.7)을 정리하면  $e(j+1) = Fe(j)$  로 간단히 쓸 수 있다. 여기서 모든 시간  $j=0,1,2,\dots,N$ 에 대해 추정 에러  $e(j)$ 가 0이 되기 위한 조건은  $\hat{z}(0) = E\{z(0)\}$  이다. (Q.E.D)

정리 1에 사용된 관측자 구속 조건은 Luenberger 구속조건으로 간주 한다. 그리고 식 (2.5)에 사용된  $FL + KC = LA$ 의 조건을 만족하는  $F$  및  $K$ 는 무한히 많은 해를 가지고 있지만 최적해를 만족하는 해 즉 performance measure를 최소화하는 해는 유일하다.

**정리 2 :** 비편향성 관측자 구속 조건  $FL + KC = LA$ 를 만족하는  $F$  및  $K$  의 하나의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F &= G_2 \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ K &= G_2 \Omega_2 + \Omega_1 \end{aligned}$$

단,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Psi H_1^{-1} M_1 \\ \Gamma_2 &= M_2 - H_2 H_1^{-1} M_1 \\ \Omega_1 &= \Psi H_1^{-1} N_1 \\ \Omega_2 &= N_2 - H_2 H_1^{-1} N_1 \end{aligned}$$

(증명)

$\Psi = LA$  로 정의한다.

Luenberger 구속 조건은  $FL + KC = LA = \Psi$ 로 쓸 수 있다. 이것을 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$[F \quad K] \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} = \Psi \quad (2.9)$$

일반적으로 F 와 K는  $\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} = n$  조건하에서 일반성을 잃지 않고 해를 가질 수 있다.

위와 같은 구속 조건을 구하기 위하여  $\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} = n$  을 만족하는 선택 행렬 L을 구해야 한다. 즉 rank 조건을 만족시키지 못하면 선택 행렬의 크기를 자유로이 증가할 수 있으므로 rank 조건을 만족할 때까지 선택행렬의 크기를 조절한다.

$\begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix}$  행렬에서 n 개의 독립 행을 선택하여 그것을  $H_1$ 이라 둔다. 그리고  $H_1$ 에 상응하는 [F K] 중 n 개의 열을  $G_1$  으로 둔다. 이때  $H_1$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_1 = S_1 \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

단  $S_1$ 은  $n \times (m+1)$  차원을 가지며  $S_1 S_1^T = I_n$  을 만족하고  $S_1$ 의 모든 원소는 0 과 1만 을 가지는 선택행렬이다.

이때  $G_1$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$G_1 = [FK] S_1^T \tag{2.11}$$

그리고 [F K]의 나머지 열을  $G_2$  라 두고  $\begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix}$  의 나머지 행을  $H_2$ 라고 한다.

이때 선형 방정식 (2.9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_1 H_1 + G_2 H_2 = \psi$$

$H_1$  은 역행렬을 가지므로  $G_1$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_1 = [\psi - G_2 H_2] H_1^{-1} \tag{2.12}$$

F와 K는  $G_1$ 과  $G_2$ 의 함수로 표시할 수 있으며 F와 K는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F &= G_1 M_1 + G_2 M_2 \\ K &= G_1 N_1 + G_2 N_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$M_1, M_2, N_1, N_2$ 는 모든 원소가 0과 1만을 갖는 적절한 크기의 선택행렬이다.

선택행렬  $S_1$ 을 선택하는 방법과 똑 같이  $\begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix}$  의 나머지 행을 선택하기 위한 행렬을 선택행렬  $T_1$ 을 둔다. 이 때  $H_2$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$H_2 = T_1 \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

단  $T_1$ 은  $n \times (m+1-n)$  차원을 가지며  $T_1 T_1^T = I_n$  을 만족하고  $T_1$ 의 모든 원소는 0 과 1만을 가지는 선택행렬이다.

다음은 Singular Value Decomposition을 이용하여 위의 각각 행렬을 구하는데 적용한다.

행렬  $\begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix}$  에 대한 Singular Value Decomposition을 하면 다음과 같다.

$$\text{SVD} \left( \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \right) = U \Sigma V^T \quad (2.15)$$

이 때  $U$ ,  $V$ , 및  $\Sigma$ 의 차수는 각각  $(m+1) \times (m+1)$ ,  $n \times n$ ,  $(m+1) \times n$  이다.  $\Sigma$ 는  $\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$ 의 형태를 가지고 행렬  $D$ 는  $n \times n$  차원을 가지고 대각선 원소만 존재하며 나머지 원소는 0이다.  $\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$  행렬중 0 행렬의 크기는  $n \times (m+1-n)$ 이다.

식 (2.15)를 다시쓰면

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

로 쓸 수 있다.

행렬  $U$ 의 Orthonormal 특성을 이용하면 행렬  $U$ 의 역행렬을 쉽게 구할 수 있다. 이를 이용하여 식 (2.16)을 다시쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} U_{11}^T & U_{12}^T \\ U_{21}^T & U_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$S_1 = [U_{11}^T \ U_{21}^T]$ ,  $T_1 = [U_{12}^T \ U_{22}^T]$  라고 정의하면  $H_1, H_2, G_1, G_2$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H_1 &= S_1 \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \\ H_2 &= T_1 \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} \\ G_1 &= [F \ K] S_1^T \\ G_2 &= [F \ K] T_1^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

Orthogonal 행렬의 항등식  $S_1^T S_1 + T_1^T T_1 = I_n$ 을 이용하면 다음의 항등식을 구할 수 있다.

$$[F \ K] S_1^T S_1 + [F \ K] T_1^T T_1 = [F \ K]$$

식 (2.18)을 이용하면

$$G_1 S_1 + G_2 T_1 = [F \ K] \quad (2.19)$$

$H_1$ 을 선택할 때 어떠한 행도 변화하지 않았으므로  $G_1$ 의 어떠한 열도 변화하지 않는다. 따라서  $F$ 는 식 (2.10)의 첫 번째 열을 포함하며  $K$ 는 식 (2.10)의 나머지 열을 포함한다.

$$F = G_1 S_1 X_1 + G_2 T_1 X_1, \quad (2.20)$$

$$K = G_1 S_1 Y_1 + G_2 T_1 Y_1$$

단,

$$X_1 = \begin{bmatrix} I_{l \times l} \\ 0_{m \times l} \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} 0_{l \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}$$

식 (2.13) 과 식 (2.20)을 비교하면

$M_1 = S_1 X_1, M_2 = T_1 X_1, N_1 = S_1 Y_1, N_2 = T_1 Y_1$  라 둘 수 있다.

그리고 식 (2.11)을 식 (2.20)에 대입하면 다음의 결과를 얻을 수 있으며 이것은 구속조건을 만족하는 값과 일치한다.

$$\begin{aligned} F &= G_2 \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ K &= G_2 \Omega_2 + \Omega_1 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Psi H_1^{-1} M_1 \\ \Gamma_2 &= M_2 - H_2 H_1^{-1} M_1 \\ \Omega_1 &= \Psi H_1^{-1} N_1 \\ \Omega_2 &= N_2 - H_2 H_1^{-1} N_1 \end{aligned}$$

### II.3 최소차수 관측자의 설계

정리 2에 의하여 F 및 K는 
$$\begin{aligned} F &= G_2 \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ K &= G_2 \Omega_2 + \Omega_1 \end{aligned}$$
 로 표시된다. (2.21)

되므로  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega_1, \Omega_2$  값이 결정되면 F 및 K는 변수  $G_2$ 에 의하여 결정되므로 performance measure J를 최소화하는 최적 관측자는  $G_2$ 의 함수로 표시될 수 있다.

그러면  $P_{ee}(j)$ 에 대한 dynamics는 식 (2.22)와 같이 쓸 수 있다.

$$P_{ee}(j+1) = F P_{ee}(j) F^T + L D Q D^T L^T + K R K^T \quad (2.22)$$

performance measure J 및 식 (2.21)에 의하여 Hamiltonian H를 다음과 같이 정의한다.

$$H = Q_e P_{ee}(j) + P_{ee}(j+1) A^T(j+1) \quad (2.23)$$

식 (2.21)을 식 (2.22)에 대입하여  $P_{ee}(j)$ 를 구하고 이를 다시 식 (2.23)에 대입하여 독립 변수  $G_2$ 에 대한 미분을 하면 다음과 같은 최적 이득  $G_2$ 를 구할 수 있다.

$$G_2 = -Y(j) X^{-1}(j)$$

단,

$$Y(j) = \Omega_1 R \Omega_2^T + \Gamma_1 P_{ee}(j) \Gamma_2^T$$

$$X(j) = \Gamma_2 P_{ee}(j) \Gamma_2^T + \Omega_2 R \Omega_2^T$$

$$\text{따라서 } F = G_2 \Gamma_2 + \Gamma_1 = -Y X^{-1} \Gamma_2 + \Gamma_1 \quad (2.24)$$

$$K = G_2 \Omega_2 + \Omega_1 = -Y X^{-1} \Omega_2 + \Omega_1 \text{로 쓸 수 있다.} \quad (2.25)$$

식 (2.24) 및 식 (2.25)를 식 (2.22)에 대입하면 추정자 에러의 autocovariance  $P_{ee}(j)$ 를 구할 수 있다.

$$P_{ee}(j+1) = L D Q D^T L^T + \Gamma_1 P_{ee}(j) \Gamma_1^T + \Omega_1 R \Omega_1^T - Y X^{-1} Y^T \quad (2.26)$$

따라서 Riccati equation  $P_{ee}(j)$ 를 구하면  $G_2$ 를 구할 수 있고  $G_2$ 를 구하면 reduced order 관측자의 최적 이득  $K(j)$ 를 구하여 원하는 reduced order 관측자가 설계된다. 그런데 여기서 변수  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega_1, \Omega_2$ 의 값에 관계없이  $P_{ee}(j)$ 의 해가 유일해야 하는데 이의 보완이 필요하다.

**정리 3** : 실 계수  $L_{l \times n}$  과  $C_{m \times n}$  행렬이 다음의 조건을 만족한다고 한다.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} = n \text{ (Full rank를 가진다.)} \quad (2.27)$$

이때 어떠한 실 계수 행렬  $S_{p \times n}$  에 대하여 실 계수  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega_1, \Omega_2$  는 Luenberger 구속 조건

$$\begin{aligned} \Gamma_1 L + \Omega_1 C &= LA \\ \Gamma_2 L + \Omega_2 C &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

을 만족하는 해 중의 하나이지만 유일한 해는 아니다. 그렇지만 다음의 명제는 모두 진이다.

(a) 만약  $G$ 와  $H$ 가  $GL + HC = 0$ 을 만족하는 실계수 행렬이라면  $G = T\Gamma_2$ ,  $H = T\Omega_2$  를 만족하는 Similarity matrix  $T$  가 존재한다.

$$\gamma = \Gamma_2^T X^{-1} \Gamma_2$$

$$\rho = \Gamma_2^T X^{-1} \Omega_2$$

(b)  $\xi = \Omega_2^T X^{-1} \Gamma_2$  의  $\gamma, \rho, \xi, \mu$ 는 유일하다.

$$\mu = \Omega_2^T X^{-1} \Omega_2$$

(c)  $F = \Gamma_1 - \Omega_1 R \xi - \Gamma_1 P_{ee}(j) \gamma$  의 해는 유일하다.  
 $K = \Omega_1 - \Omega_1 R \mu - \Gamma_1 P_{ee}(j) \rho$

**(증명)** (a) 행렬  $C_1$  은  $\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ C_1 \end{bmatrix} = n$ 을 만족하는  $C$ 의  $(n-1)$ 개의 열벡터이라고 가정한다. 그리고 행렬  $C$ 의 나머지  $(m+1-n)$ 개의 열벡터를  $C_2$  라고 한다. 이때 선형 대수에 의하여 다음을 만족하는 유일한 행렬  $M_1$  및  $N_1$ 이 존재한다.

$$C_2 = M_1 L + N_1 C_1 \quad (2.29)$$

더구나  $C$ 의 열벡터들이 서로 독립이므로  $\text{rank}(M_1) = m+1-n$  이다. 식 (2.29)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma_2 L + \Omega_2 C = 0$$

$$\text{단, } \Gamma_2 = M_1, \quad \Omega_2 C = N_1 C_1 - C_2.$$

$\text{rank}(\Gamma_2) = m+1-n$  이고  $\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} = n$  이므로  $\text{rank}(\Omega_2) = m+1-n$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서  $L$ 과  $C$  사이에 더 많은 common state가 존재하지 않는다. 이것은 모순법에 의하여 증명할 수 있다.

$GL + HC = 0$ 을 만족하는 행렬  $G$ 와  $H$ 가  $\text{rank}(G) = r > m+1-n$ ,  $\text{rank}(H) = r > m+1-n$ 를 만족한다고 한다. 이때  $L$ 의 열벡터에 의하여 확장될 수 없는 행렬  $C$ 의 최대  $(m-r)$  개의 열벡터가 있다. 따라서  $L$ 과  $C$ 의 열벡터에 의하여 확장되는 공간은 기껏해야  $(1+m-r)$ 의 크기를 갖는다.  $r > 1+m-n$ ,  $1+m-r < n$  이므로  $L$ 과  $C$ 에 의하여 확장되는 공간이  $n$ 보다 작다. 이것은 식 (2.27)의 조건에 위배된다. 따라서  $L$ 과  $C$  사이에 더욱 더 많은 common 열벡터가 존재하지 않는다.



이제 집합  $\theta$  를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \{(G, H) : GL + HC = 0\} \quad (2.30)$$

전체에 의하여  $\text{rank}(\Gamma_2) = m + l - n$  이고  $GL + HC = 0$  을 만족할 때 집합

$$\theta = \{G, H : G = T\Gamma_2, H = T\Omega_2, T \text{는 임의이다.}\} \text{로 쓸 수 있다.} \quad (2.31)$$

간단한 선형대수에 의하여 식 (2.30)과 식 (2.31) 은 동가이다. 만약  $(G, H)$  해의 쌍이 존재하고  $GL + HC = 0$  을 만족하지만 식 (2.31)을 만족하지 않는다고 가정한다.

즉  $G = T\Gamma_2$  그리고  $H = T\Omega_2$  를 만족하는 행렬  $T$ 가 존재하지 않는다고 한다. 이때

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} G \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \text{ 그리고 } \bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \text{라고 정의한다.}$$

분명히  $\bar{G}L + \bar{H}C = 0$  이다. 그런데  $\text{rank}(\Gamma_2) = m + l - n$  이고  $G$ 의 약간의 열벡터와  $H$ 는  $\Gamma_2$ 와  $\Omega_2$ 의 열벡터와 서로 독립이므로 ( 왜냐하면  $G$ 와  $H$ 는 식 (2.31)을 만족하지 않으므로)  $\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{G} \\ \bar{H} \end{bmatrix} > m + l - n$  이다. 그렇지만 이미 논의한 것에 의하면 이것은 가능하지 않다.

증명 (b)  $\Gamma_2 L + \Omega_2 C = 0$  라고 가정한다. 식 (2.31)에 의하여  $\bar{\Gamma}_2 = T\Gamma_2$  그리고  $\bar{\Omega}_2 = T\Omega_2$  를 만족하는 역행렬이 가능한  $T$  행렬이 존재한다. 이때  $T$ 는 역행렬이 존재하므로 쉽게  $\bar{\Omega}_2, \bar{\Gamma}_2$  를  $\gamma, \rho, \zeta$ , 그리고  $\mu$  에 대입하면  $\Gamma_2$  및  $\Omega_2$  에 의한 값과 같음을 쉽게 알 수 있다.

증명 (c)  $\gamma, \rho, \zeta$ , 그리고  $\mu$ 를  $F$  및  $K$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} F &= \Gamma_1 - \Omega_1 R \zeta - \Gamma_1 P_{ee}(j) \gamma \\ K &= \Omega_1 - \Omega_1 R \mu - \Gamma_1 P_{ee}(j) \rho \end{aligned} \quad (2.32)$$

이때  $F$  및  $K$ 가 유일함을 보여야 한다.

$(\Gamma_1, \Omega_1)$  및  $(\bar{\Gamma}_1, \bar{\Omega}_1)$  을 식 (2.28)을 만족하는 서로 다른 해 집합이라 한다.  $F$ 와  $K$ 는  $(\Gamma_1, \Omega_1)$ 를 대입했을 때의 값이고  $\bar{F}$ 와  $\bar{K}$ 는  $(\bar{\Gamma}_1, \bar{\Omega}_1)$ 를 대입했을 때의 값이라고 한다. 즉  $\bar{F} = \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Omega}_1 R \zeta - \bar{\Gamma}_1 P_{ee}(j) \gamma$  로 대치 될 수 있다.  $(2.33)$

$$\bar{K} = \bar{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1 R \mu - \bar{\Gamma}_1 P_{ee}(j) \rho$$

이때  $F = \bar{F}$ 와  $K = \bar{K}$ 임을 증명하면 된다.

$\Gamma_2 L + \Omega_2 C = 0$  이므로 우선  $\zeta L + \mu C = 0$  그리고  $\gamma L + \rho C = 0$  이 됨을 쉽게 알 수 있다. 이런 사실을 이용하여  $FL + KC = \bar{F}L + \bar{K}C = LA$   $(2.34)$

$$(F - \bar{F})L + (K - \bar{K})C = 0 \quad (2.35)$$

을 유도할 수 있다.

따라서 식 (2.35) 및 식 (2.31)에 의하여 다음의 식 (2.34) 및 식 (2.35) 를 얻을 수 있다.

$$F - \bar{F} = T_1 \Gamma_2 \quad (2.36)$$

$$K - \bar{K} = T_1 \Omega_2 \quad (2.37)$$

단,  $T_1$  은 역행렬이 존재하는 행렬이다.

우리는 이때  $F = \bar{F}$  그리고  $K = \bar{K}$  임을 보여 주면 된다.

식 (2.32)와 식 (2.33)을 식 (2.36) 및 식 (2.37)에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$(\Gamma_1 - \bar{\Gamma}_1)(I - P_{ee}(j)\gamma) - (\Omega_1 - \bar{\Omega}_1)R\zeta = T_1 \Gamma_2 \quad (2.38)$$

$$(\Omega_1 - \bar{\Omega}_1)(I - R\gamma) - (\Gamma_1 - \bar{\Gamma}_1)P_{ee}(j)\rho = T_1 \Omega_2 \quad (2.39)$$

식 (2.38) 및 식 (2.39)에 미리  $P_{ee}\Gamma_2^T$  및  $R\Omega_2^T$  를 각각 곱하고 이 두 식을 합하면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$T_1 (\Gamma_2 P_{ee}(j) \Gamma_2^T + \Omega_2 R \Omega_2^T) = 0 \quad (2.40)$$

$\Gamma_2 P_{ee}(j) \Gamma_2^T + \Omega_2 R \Omega_2^T$  는 역행렬이 존재하므로  $T_1$  은 0 행렬이 될 수밖에 없다. 따라서 가정에서  $(F, K)$  의 해가 아닌 다른해  $(\bar{F}, \bar{K})$  가 존재하는 것이 모순이다. 따라서  $F$  및  $K$  는 유일하다. (Q.E.D)

따라서 reduced order 최적 관측자  $\hat{z}$  는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\hat{z}(j+1) = F\hat{z}(j) + Ky(j) + Gu(j)$$

단,

$$Y = \Omega_1 R \Omega_2^T + \Gamma_1 P_{ee}(j) \Gamma_2^T$$

$$X = \Gamma_2 P_{ee}(j) \Gamma_2^T + \Omega_2 R \Omega_2^T$$

$$F = -YX^{-1}\Gamma_2 + \Gamma_1$$

$$K = -YX^{-1}\Omega_2 + \Omega_1$$

$$P_{ee}(j+1) = LDQD^T L^T + \Gamma_1 P_{ee}(j) \Gamma_1^T + \Omega_1 R \Omega_1^T - YX^{-1}Y^T$$

### III. Reduced-Order 관측자를 이용한 최적 regulator의 설계

최적 제어기  $u(j)$  는 출력  $y$  및 reduced order 관측자인  $\hat{z}$  의 선형 조합식으로 표현된다.

$$u(j) = K_1 y(j) + K_2 \hat{z}(j) \quad (3.1)$$

$u(j)$  를 구하기 위하여  $y(j) = Cx(j) + v(j)$  및  $\hat{z}(j) = Lx(j) - e(j)$  를 식 (3.1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(j) &= K_1 [Cx(j) + v(j)] + K_2 [Lx(j) - e(j)] \\ &= Mx(j) + K_1 v(j) - K_2 e(j) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{단, } M = K_1 C + K_2 L \quad (3.3)$$

식 (3.3)에서 백색 잡음  $v(j)$  및 관측자 에러  $e(j)$ 는 전 시간 공간에서 평균을 취하면 각각 0이 된다. 왜냐하면  $v(j)$ 는 백색잡음의 가정에 의하여 0이고 관측자 에러  $e(j)$ 는 비편향성에 의하여 0이 된다. 따라서 잡음이 없다는 가정하에 원하는 제어 입력  $u_d(j) = Mx(j)$ 로 두면  $E\{u(j) - u_d(j)\} = 0$  즉 제어입력  $u$ 도 비편향성이 된다. 이런 구속 조건을 이용하여 제어 performance measure  $J$ 를 다음과 같이 둘 수 있다.

$$J = E \{ [x^T(j)Q_c x(j) + u^T(j)R_c u(j)] + x^T(N)S_c x(N) \} \quad (3.4)$$

단,  $Q_c, S_c \geq 0$  그리고  $R_c > 0$

이 장에서는 적절한  $K_1$  과  $K_2$ 를 선택함으로써 제어 performance measure  $J$ 를 최소화 하는 최적 제어기  $u$ 를 설계하는데 있다. 비록  $K_1$  과  $K_2$  가 reduced order 최적 관측기의 설계에는 무관하다. 그러나 이런 관측자의 행렬은  $K_1$  과  $K_2$ 의 선택에 영향을 주게되나 separation theory 에 의해 완전히 관측자의 설계와 제어기의 설계는 분리되므로  $K_1$  과  $K_2$ 의 설계는 관측자에 영향을 받지 않는다.

여기서 앞에서 유도한 reduced order 관측자의 설계와 같은 방법으로 최적 제어 입력  $u(j)$ 를 유도할 수 있다.

$\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ C \end{bmatrix} = n$  의 조건은  $K_1$  및  $K_2$ 이 존재할 필요조건이다.

식 (3.4)와 식 (3.3)을 이용하여 최적제어 입력을 구하려면 우선 Hamiltonian을 다음과 같이 정의한다.

$$H = \text{trace} \begin{bmatrix} Q_c P_{xx}(j) + R_c P_{uu}(j) + P_{xx}(j+1) \Lambda_{xx}^T(j+1) \\ + P_{xe}(j+1) \Lambda_{xe}^T(j+1) + P_{ex}(j+1) \Lambda_{ex}^T(j+1) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

단,

$$\begin{aligned} P_{uu}(j) &= E\{u(j)u^T(j)\} \\ &= M P_{xx(j)} M^T - M P_{xe(j)} K_2^T - K_2 P_{ex(j)} M^T + K_1 R K_1^T + K_2 P_{ee(j)} K_2^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} P_{xx}(j+1) &= E\{x(j+1)x^T(j+1)\} \\ P_{xe}(j+1) &= E\{x(j+1)e^T(j+1)\} \\ P_{ex}(j+1) &= E\{e(j+1)x^T(j+1)\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

2 장의 정리 2에 의하여 비편향성 구속조건인 식 (3.3)을 만족하는 해는 다음과 같다.

$$K_1 = G_c \Gamma_2 + \Gamma_1, \quad K_2 = G_c \Omega_2 + \Omega_1 \quad (3.8)$$

$\Lambda_{xx}(j)$ 는 Hamiltonian  $H$ 를  $P_{xx}(j)$ 에 대하여 미분하면 얻을 수 있다.

$$\Lambda_{xx}(j) = \frac{\partial H}{\partial P_{xx}(j)} = Q_c + M^T R_c M + A_c^T \Lambda_{xx}(j+1) A_c \quad (3.9)$$

$$\Lambda_{xx}(N) = S_c$$

단,  $A_c = A + B M$

위 식 (3.8)은 모든 변수가 상수이므로 미리 계산되어 질 수 있다.

정의 4 : A nxn 이고 B mxm 행렬이라고 할 때  $A \oplus B$  는 다음과 같이 정의된다.

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B$$

단,  $I_m$  및  $I_n$  은 각각 mxm 단위 행렬 nxn 단위 행렬이다.

정리 4 : Kronecker Algebra

A, D 그리고 V를 각각 pxq, qxs, qxq 행렬이라고 하자.

$$\text{vec}(AD) = (I_s \otimes A) \text{vec}(D) = (D^T \otimes I_m) \text{vec}(A)$$

$$\text{vec}(AVD) = (D^T \otimes A) \text{vec}(V)$$

증명 : 증명은 [5]에서 한 증명과 동일함.

$P_v = \text{vec}(P_{xe})$  그리고  $\Lambda_v = \text{vec}(\Lambda_{xe})$  라 정의한다.

이 때 정의 2-4 및 정리 4를 이용하여 식 (3.13)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_v(j+1) &= \alpha_{11}P_v(j) + \alpha_{12}\Lambda_v(j+1) + \theta_{v3} \\ \Lambda_v(j) &= \alpha_{21}P_v(j) + \alpha_{22}\Lambda_v(j+1) + \theta_{v4} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{단, } \begin{aligned} \alpha_{11} &= F \otimes A_c + \gamma_3^T \otimes \beta_3 & \alpha_{12} &= \gamma_4^T \beta_4 & \alpha_{21} &= \gamma_5^T \otimes \beta_5 & \alpha_{22} &= F^T \otimes A_c^T + \gamma_6^T \otimes \beta_6 \\ \theta_{v3} &= \text{vec}(\theta_3) & \theta_{v4} &= \text{vec}(\theta_4) \end{aligned}$$

위식을 대수적 행렬 방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} P_v(j+1) \\ \Lambda_v(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_v(j) \\ \Lambda_v(j+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{v4} \\ \theta_{v5} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

원래  $P_{xe}$  와  $\Lambda_{xe}$  사이에는 비선형 관계가 있었으나 Kronecker Algebra를 적용한 후 식 (3.15)에서와 같이  $\Lambda_v$  와  $P_v$  간에는 서로 선형관계가 있으므로 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\Lambda_v(j) = M_v(j)P_v(j) + \phi(j) \quad (3.16)$$

단,  $M_v(j)$  및  $\phi(j)$  는 각각  $P_v(j)$ 에 대한 절편 및 기울기로 간주할 수 있다.

식 (3.15)와 식 (3.16)을 이용하면 다음과 같은 2 Algebraic Riccati equation을 얻을 수 있다.

$$M_v(j) = \alpha_{21} + \alpha_{22}M_v(j+1)[I - \alpha_{12}M_v(j+1)]^{-1}\alpha_{11} \quad (3.17)$$

$$\phi(j) = \alpha_{22}M_{v(j+1)}[I - \alpha_{12}M_v(j+1)]^{-1}[\alpha_{12}\phi(j+1) + \theta_{v3}] + \alpha_{22}\phi(j+1) + \theta_{v4} \quad (3.18)$$

boundary condition  $\Lambda_v(N)=0$  이므로 식 (3.16)에서 항상  $M_v(N)=0$   $\phi(N)=0$  의 조건을 만족하여야 한다. 이 Riccati equation은 최종치 문제이므로 시간에 대해 backward 로 풀면 된다. 따라서  $M_v$  및  $\phi$  를 풀면  $P_v$  및  $\Lambda_v$ 에 대해 풀 수 있으며  $P_v$  및  $\Lambda_v$  를 unstack 하면 Gc에 해가 구해져서 결국 원하는 최적 이득  $K_1$  및  $K_2$  를 구할 수 있다. 따라서 reduced order 관측자를 이용한 최적 제어를 설계할 수 있다. 여기서 사용한 방법은 pole의 이동법에 의하여 구하였지만 다른 방법으로도 얼마든지 가능한 방법이 있다.

$\Lambda_{xe(j)}$  및  $\Lambda_{ex(j)}$ 는 각각 식 (3.9) 및 식 (3.10)의 정의에 의하여 구할 수 있다.

$$\Lambda_{xe(j)} = \frac{\partial H}{\partial P_{xe(j)}} = -M^T R_c K_2 - A_c^T \Lambda_{xx}(j+1) B K_2 + A_c^T \Lambda_{xe}(j+1) F \quad (3.10)$$

$$\Lambda_{ex(j)} = \Lambda_{xe}^T(j) \quad (3.11)$$

식 (3.7)에서의 공통 인수인 최적 제어 이득식  $G_c$ 를 구하기 위하여 식 (3.5)의 Hamiltonian을  $G_c$ 에 대하여 편미분 하면 된다.

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{\partial H}{\partial G_c} \\ &= \beta_1 P_{xe}(j) \gamma_1 + \beta_2 \Lambda_{xe}(j+1) \gamma_2 + \theta_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

단,

$$\begin{aligned} \Delta &= R_c + B^T \Lambda_{xx}(j+1) B \\ \beta_1 &= \Delta^{-1} (B^T \Lambda_{xx}(j+1) A_c + R_c M) \\ \theta &= \Gamma_2 R \Gamma_2^T + \Omega_2 P_{ee}(j) \Omega_2^T \\ \gamma_1 &= \Omega_2^T \theta^{-1} \\ \beta_2 &= \Delta^{-1} B^T \\ \gamma_2 &= (F P_{ee}(j) \Omega_2^T + K R \Gamma_2^T) \theta^{-1} \end{aligned}$$

따라서 식 (3.12)에서 구한  $G_c$ 를 이용하여  $P_{xe}$  및  $\Lambda_{xe}$ 에 대한 차분 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{xe}(j+1) &= A_c P_{xe}(j) F^T + \beta_3 P_{xe}(j) \gamma_3 + \beta_4 \Lambda_{xe}(j+1) \gamma_4 + \theta_4 \\ \Lambda_{xe}(j) &= A_c^T \Lambda_{xe}(j) F + \beta_5 P_{xe}(j+1) \gamma_5 + \beta_6 \Lambda_{xe}(j+1) \gamma_6 + \theta_5 \end{aligned} \quad (3.13)$$

단,

$$\begin{aligned} \beta_3 &= -B \beta_1, \quad \gamma_3 = \gamma_1 \theta_3, \quad \beta_4 = -B \beta_2, \quad \gamma_4 = \gamma_2 \theta_3, \quad \beta_5 = -(B^T \lambda_{xx}(j+1) A_c + R_c M)^T \beta_1 \\ \gamma_5 &= \gamma_1 \Omega_2, \quad \beta_6 = -(B^T \lambda_{xx}(j+1) A_c + R_c M)^T \beta_2, \quad \gamma_6 = \gamma_2 \Omega_2 \end{aligned}$$

정의 2 :  $A$ 를  $m \times n$  행렬이라 하고  $A^p$ 를  $A$ 의  $p$ 번째 행 벡터라고 가정한다.

$$\text{이때 } \text{vec}(A) \triangleq \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A^n \end{bmatrix} \text{ 와 같이 정의된다.}$$

정의 3 :  $A$   $p \times q$  이고  $B$   $m \times n$  행렬이라고 할 때  $A \otimes B$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$A \otimes B \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix}$$

최적 제어 입력  $u(j)$ 는 식 (3.1)과 같이  $u(j) = K_1 y(j) + K_2 \hat{z}(j)$ 로 쓸 수 있으며 최종적으로 구한  $M_v$  및  $\phi$ 를 이용하여 미지 변수  $K_1$  및  $K_2$ 에 대하여 정리할 수 있으므로 원하는 최적 이득 산출을 할 수 있다.

## IV. 시뮬레이션

### (1) 관측자의 설계 및 시뮬레이션

시뮬레이션으로 사용된 대상은 armature 전류를 고정시키고 계전류를 변화시킴으로써 제어하는 직류 서보 전동기이다. 시스템의 블록 선도는 다음과 같다.

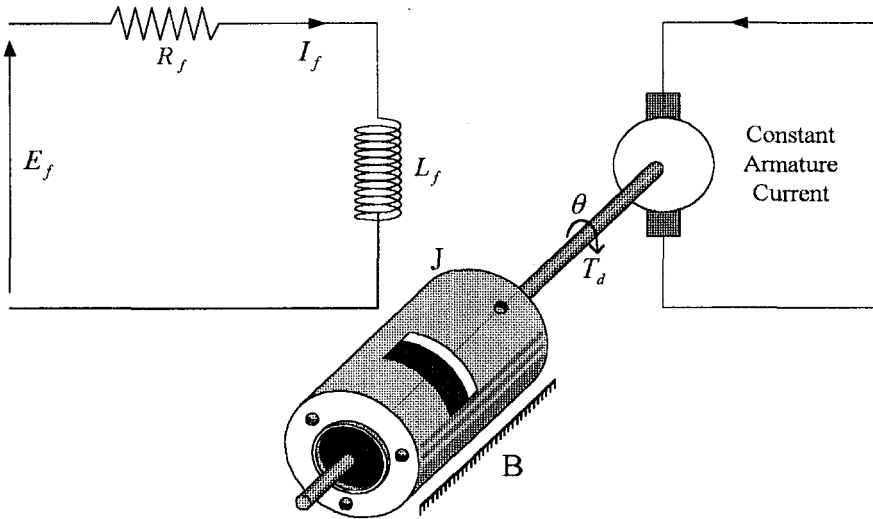


그림 1 DC 서보 모터의 모델

위 직류 서보 전동기의 Torque 및 전류의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_d &= J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} \\ &= J \frac{d\omega}{dt} + B\omega \\ &= K_T i_f, \quad \text{where } \omega = \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$E_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (4.2)$$

여기서  $x_1 = \omega$ ,  $x_2 = i_f$ 라 두고 백색 잡음  $w$ 가 포함되었다고 가정하면 다음과 같은 2nd order의 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} E_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (4.3)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v(t)$$

시뮬레이션을 위해서 현재 실험중인 MAXON DC 서보 모터의 변수의 값을 이용했다. 아래 Table 1은 서보 모터의 실제 변수값이다.

전기적 상수	기계적 상수	Sampling Time	잡음의 Intensity
$R_f = 1.23\Omega$	$K_T = 38.9 \text{ mNm/A}$	$T_s = 100 \mu \text{ sec}$	$Q_w = 1$
$L_f = 0.34\text{mH}$	$J = 65.5 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$		$Q_v = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$
$\tau = 276.4 \mu \text{ sec}$	$B = 12289 \text{ g} \cdot \text{cm}^2/\text{sec}$		백색잡음

Table 1. 시스템 parameter의 값과 잡음에 대한 정보

위 Table 1을 이용하여 식 (4.3)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.6 & 5938.9 \\ 0 & -3617.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2941.2 \end{bmatrix} E_f$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v(t)$$

그리고 모터의 회전수를 추정하기 위하여 Selection matrix L을 [1 0]로 정했다. 위식을 Discretize 시키면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9814 & 0.4934 \\ 0 & 0.6964 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0772 \\ 0.2468 \end{bmatrix} u(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0001 \end{bmatrix} w(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + v(n)$$

모터의 입력 전압을 20V로 하였을 때 그림 2의 (a)에서 보는 바와 같이 실제값과 추정치의 값이 거의 차이가 나지 않아 그림 2의 (b)에 에러의 값을 나타내었다.

정상상태에서의 실제값은 514.7rpm이므로 속도에러의 편차는 대략  $\pm 1 \text{ rpm}$  정도 되므로 reduced order 관측자는 설계한대로 실제값을 잘 추정함을 알 수 있다. 특히 본 논문에서는 predictor를 설계했지만 filter를 설계하면 더욱 정확한 값을 얻을 수 있다. 필터의 설계도 같은 방법으로 하면 쉽게 해결할 수 있다.

## (2) 최적 레귤레이터의 설계 및 시뮬레이션

pole의 이동법에 의하여 임의로 pole을  $\{0.02, 0.4\}$ 로 이동시킨다. 그러면 제어 입력  $u$ 의 gain의 값  $M$ 을 정할 수 있다 ( $M = [-0.0932 \ -0.1653]$ ). 그림 3은 주어진 초기 입력값  $\begin{bmatrix} 200 \\ 3 \end{bmatrix}$  즉 초기 속도값이 200이고 초기 전류치가 3A 일 때 reduced order 관측자를 이용한 최적 제어를 구현하여 실험한 결과이다. 실험 결과에서 알 수 있듯이 최적 gain  $K$ 의 값은 초기치와 최종치에서 과도 상태의 값을 가지고 어느 시간이 흐른 후에는 일정한 값을 가지게 된다. 이것은 Two Point Boundary Value Problem을 푼 해가 초기치와 최종치의 값에 영향을 받기 때문이다. 그리고 그림 3의 (b)에서 속도의 값은 최적 입력에 의하여 빨리 0으로 regulate됨을 알 수 있다. 따라서 최적 입력  $u$ 를 구하기 위하여 full order 관측자를 이용한 경우에 비하여 거의 차이가 없다. 단지 관측자뿐만 아니라 제어기에 강제로 pole을 shift 시켰기 때문에 performance는 약간 떨어진다. 그렇지만 full order 관측자에 비하여 계산 속도나 메모리를 덜 차지하기 때문에 reduced order 관측자를 사용할 경우에는 빠른 속도를 요구하거나 메모리에 별로 영향을 많이 받는 시스템에 적용하면 좋다.

## V. 결 론

본 논문에서 사용된 방법은 폐 루프에서의 고유치가  $F$ 에 속하거나 아니면  $A + BM$ 에 속한다. 이것은 제어 구조에 있어서 관측자를 이용할 때 나타나는 중요한 성질이다. 즉  $F$ 에 속할 경우에는 임의로 제어기나 관측자의 극점을 이동시킬 수 있으며 또한  $A + BM$ 에 속하게 되면 제어 입력의 Gain을 임의로 변화시키게 되므로 폐 루프의 고유치 선정 문제는 결국 reduced order 필터나 관측자의 최적 Gain 설정 문제에 귀착된다. 여기서 최적 Gain 문제는 full order Kalman filter 보다 계산 시간이 덜 걸리고 또한 소요되는 memory 크기도 작아지므로 제어기를 설치하기가 쉬운 장점이 있으나 성능이 떨어지는 것은 어쩔 수 없다. 그러나 단지 출력을 얻을 수 있는 변수가 제한되어 있을 때는 매우 효과적이다. 요즘 많이 대두 되고 있는 Sensorless 제어기를 개발할 때 사용될 수 있다. 단지 이 때에는 관측자인 경우에는 가관측성의 조건을 갖추어야 하며 레귤레이터 문제는 가 제어성의 조건을 갖추어야 가능하다.

## References

- [1] H. Kwakernak and R. Sivan, "Linear Optimal Control Systems," Wiley-Interscience, New Your, 1972.
- [2] K.M Nagpal, R.E Helmick, and C.S Sims " Reduced-Order Estimation Part I :Filtering, Part II : Smoothing" International Journal of Control, Vol 45, No. 6, pp 1867-1888, 1987.
- [3] K.M Nagpal, R.E Helmick, and C.S Sims " Innovation Approach to Reduced-OrderEstimation of Complementary State, Part I : Filtering, Part II : Smoothing



and Discrete case", International Journal of Control, Vol 20, No. 7, pp 1867-1898, 1987.

- [4] Tse, E., "Optimal Minimal-Order Observer Estimators for Discrete Linear Time Varying Systems", IEEE trans. on Automatic Control, Vol. AC-15, No.4, pp 416-426, 1966.
- [5] Axsater, S., "Suboptimal Time Variable Feedback Control for Linear Dynamical Systems with Random inputs" International Journal of Control, Vol. 4, No.6, pp. 549-566, 1966.
- [6] Brewer, John W., "Kronecker Products and Matrix Calculus in Systems Theory", IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol. CAS-25, No. 9, September, 1978.
- [7] Luenberger, D.G, 1964, IEEE Trans. on Military Electronics, Mil-8, pp 74-80.
- [8] H. Kim, "Observer Based Estimation and Control", 1992, Dissertation in West Virginia University.

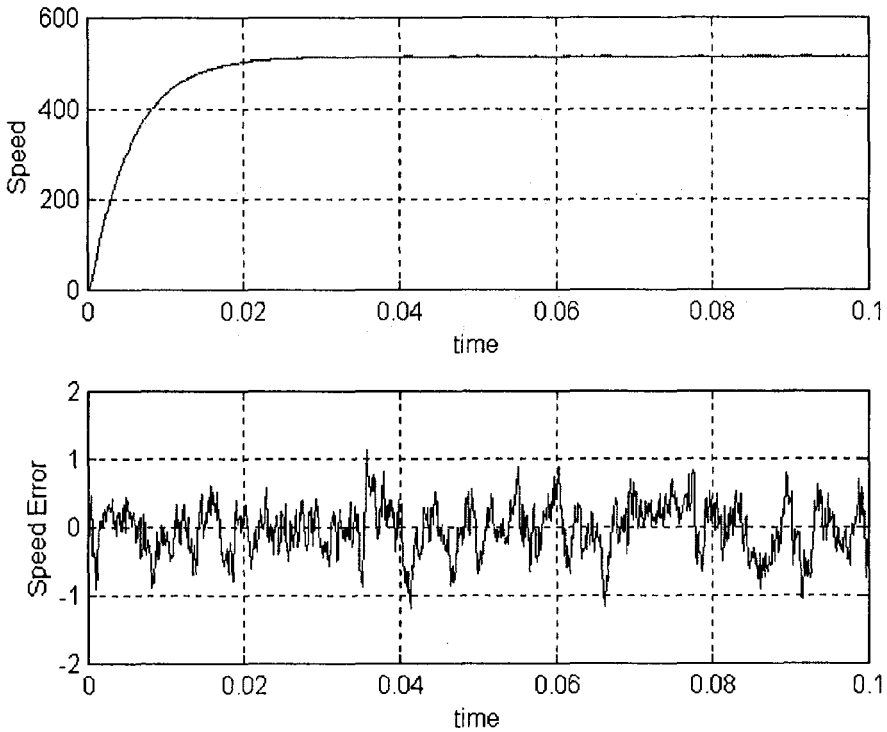


그림 2 (a) 입력 전압이 20V일 때의 DC 서보 모터의 실제 속도와 추정속도  
 (b) 입력 전압이 20V일 때의 속도 에러

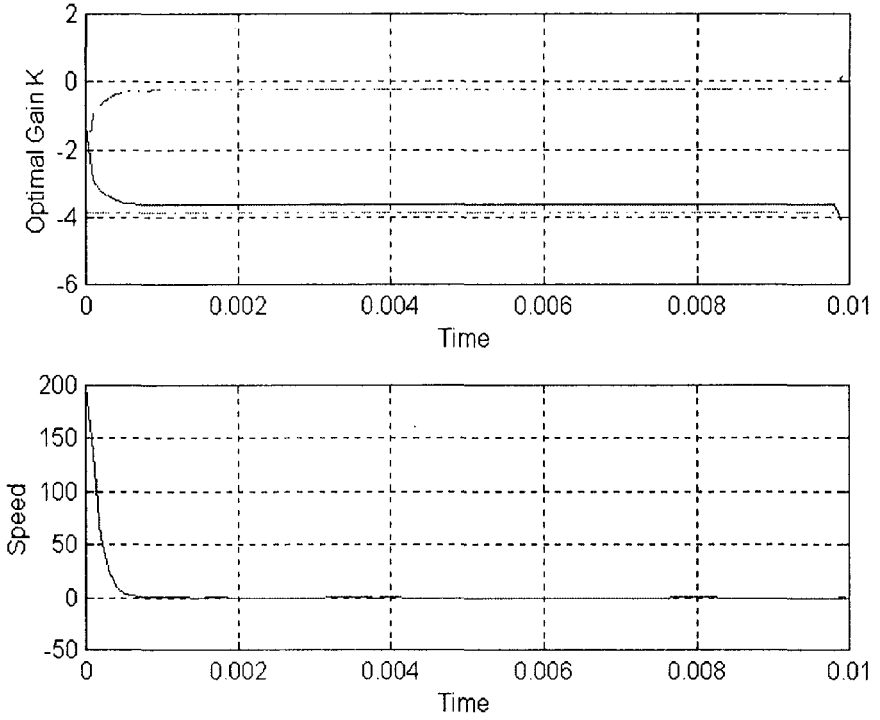


그림 3 (a) 관측자를 이용한 제어기의 최적 gain  
(b) 관측자를 이용한 제어기에 의한 속도 제어