

## $H^\infty$ 를 이용한 필터 및 제어기의 개발

고민성 · 김한실  
제어계측공학과

### <요 약>

미지의 예기치 않은 noise에 의해 영향을 받은 시스템을 제어하기는 쉽지 않다. 그리고 강인성과 low performance measure를 가진 제어 시스템을 설계하기는 더욱 어렵다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도는 계속되어 왔으며 이 중 Kalman Filter는 system noise 및 measurement noise 가 오직 gauss distribution을 가지고 noise에 대한 정보가 있을 경우 optimal filter 임이 알려져 있다. [1-3]. 그러나 실제로 이러한 noise가 반드시 gauss distribution을 갖는 noise라고 할 수 없으며 또한 noise에 대한 정보가 전혀 없을 때는 optimal filter를 설계할 수 없으므로 입·출력이 bounded할 수 있도록 suboptimal 개념의 새로운 제어기의 설계가 필요하다. 본 논문에서는 noise에 대한 정보가 필요없고, 어떠한 noise라는 가정이 없는  $H^\infty$  제어기 구성이 강인하고 low performance measure를 가진 제어기임을 실험을 통해서 보여주고, 산업현장에 응용할 수 있는 가능성을 제시한다.

---

## The Development of Filter and Control using $H^\infty$ theory

Koh, min Sung · Kim, han Sil  
Dept. of Control & Instrumentation Engineering

### <abstract>

In the field of control and instrumentation, it is very difficult to control system which is affected by unknown and unexpected noise. Therefore, if we can design controller with robustness and small performance measure, it will be used extensively in the industrial application. Although it may be hard for designers to implement such a controller, it has been studied continuously for several decades. As a result, recently a few of control

design methods give a solution with a good performance and robustness[4],[6-9]. We suggest that H infinity controller can be applied extensively in the industrial field that is affected by extremely deteriorated noise source. In this paper after constructing the Inverted Pendulum as an experimental apparatus, we design PID, Fuzzy, and  $H^\infty$  controller to compare its characteristic results. If the similar design method with this paper is applied to the industrial filed, it may give a good solution with robustness and low performance areas can be shown in the field of signal processing, motor control, sensor interfacing, robot control.

## 1. 서 론

미지의 예기치 않은 noise에 의해 영향을 받은 시스템을 제어하기는 쉽지 않다. 그런 시스템에 대하여 강인성과 low performance measure를 가진 제어를 설계하기는 더욱 더 어렵다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도는 계속되어 왔으며 Kalman Filter의 방법은 measurement noise와 system noise가 오직 가우스 분포를 가질 때 optimal filter임을 제시하였다[1-3]. 그러나 이러한 noise

noise 환경 아래에서  $H^\infty$  제어기 구성이 강인한구성이 될 수 있음을 실험을 통해 보여 준다. 적용할 시스템은 inverted pendulum 이며 그의 구성은 그림1과 같이 크게 제어기부, I/O interface부, 위치 센서(신호변환)부, DC 전동기 구동부, DC 전동기부, cart mechanism부로 구성되어 있다.

## 2. 하드웨어의 설계 및 제작

### 1). DC 전동기 구동부 설계

정/역 방향 전환이 가능하며 switching 회로가 간단하고 빠른 switching이 되도록 FET를 이용하여 설계하였고 I/O interface card로부터 나오는 DC 전동기 회전방향 신호가 바뀌는 순간의 arm short를 방지하기 위해 FET의 gate 신호 전단에 논리(logic) 회로를 첨가하여 동시에 모든 FET들이 켜지는 일이 발생하지 않도록 하였다. 또한 정/역회전 전환시 발생하는 큰 과도전류에 견딜 수 있도록 FET는 DC 전동기 정격 전류의 3배정도, diode는 2배정도 되는 소자를 사용하였다. DC motor의 회전 속도를 조절하기 위하여 PWM방식을 사용하였는데 Motor의 선택은 기동 torque가 크고 속응력을 고려하여 24V, 3.0A 정격인 DC motor를 사용하였다.

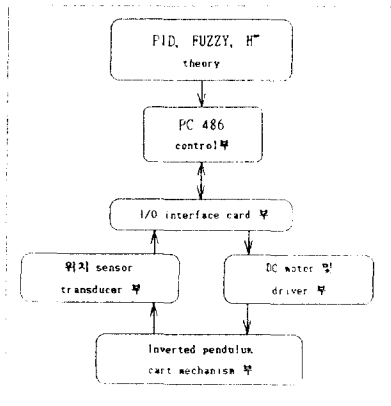


그림 1. 독립전자 시스템 블럭도

가 반드시 gauss distribution을 갖는 다고 할 수는 없으며 또한 noise에 대한 정보가 전혀 없을 때 새로운 제어 방법이 요구된다. 본 논문에서는 noise에 대한 정보가 필요 없고, 어떠한 noise라는 가정이 없이 미지의

## 2) 센서 변환부 설계

각도를 측정하기 위해 마찰이 적고 정밀도가 좋은 무접촉 자기저항방식의 angle sensor를 cart위에 설치하여 각도 신호를 미분, 적분하여 PID 제어시 사용할 수 있도록 구성하였다. 또한 cart가 이동한 정보를 얻기 위해 encoder를 이용하였고 DC 전동기가 1회전시 60 pulse가 나오므로 pulley의 반지름과의 관계식에 의해 이동거리를 측정하도록 카운터(counter)를 제작하였고 이 카운터를 I/O interface card와 연결함으로써 x축 거리 정보를 얻을 수 있도록 구성하였다.

## 3) cart mechanism부 설계

그림 2와 같이 전동기의 동력을 cart에 전달하기 위해 timing belt와 풀리를 구성하였고 timing belt의 길이는 1m50cm, 풀리의 반지름은 2.5cm로 제작하였다. cart의 무게를 줄이기 위해 알루미늄으로 만들고 바퀴를 레일 위에 4개, 레일 밑에 4개를 달아 좌, 우로 급격한 전환시 레일에서 이탈하거나 튀지 않도록 제작하였다. 막대 무게가 상부 공에만 집중되도록 플라스틱으로 40cm정도로 만들고 공은 왜란에 대한 실험을 하기 위해서 뚜껑을 열고 닫을 수 있도록 구성하였다.

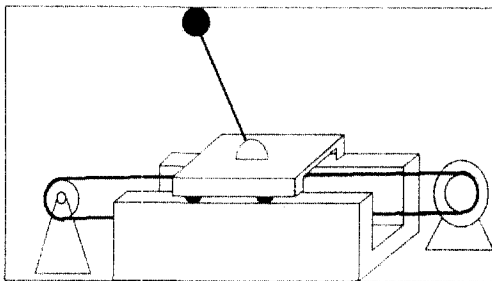


그림 2. 도립진자의 기계학적 구조

## 4) I/O interface card부

제작한 hardware와 IBM PC와의 interface를 위해 PC의 0x2EC번지를 할당하여 DAS board DT2801-A를 사용하였다.

여기서 D/A 변환기의 채널 1개를 PWM 회로의 DC 기준 전압으로 사용하고, A/D 변환기의 1번 채널을 각도 센서에, 2번 채널을 각도 센서의 미분신호에, 3번 채널을 각도 센서의 적분 신호에 각각 사용하였다. 전동기의 회전방향과 카운터의 리셋 신호는 Digital In/ Out Port-1을 사용하고 카운터의 데이터(data)를 읽는데는 Port-0를 사용하였다.

## 5) 도립 진자의 모델링

그림 3에서 x축 방향으로 Newton 제 2 법칙을 적용해 보면 다음과 같다.

$$F = M\ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta)$$

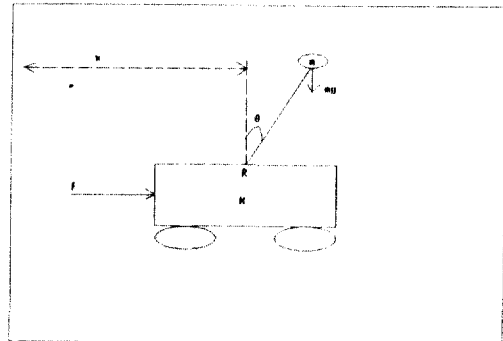


그림 3. 도립진자의 모델링

위의 식을 풀면

$$F = (M + m)\ddot{x} - ml(\sin \theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos \theta)\ddot{\theta} \quad (1)$$

과 같이 된다.

여기서 R점에서 회전운동에 대해 Newton의 제2법칙을 적용하여 보면 다음과 같이 된다.

$$\left\{ m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \right\} l \cos \theta - \left\{ m \frac{d^2}{dt^2} l \cos \theta \right\} \\ l \sin \theta = mgl \sin \theta$$

위의 식을 정리하면

$$m \ddot{x} \cos \theta + ml \ddot{\theta} = mgl \sin \theta \quad \text{----- (2)}$$

여기서  $\theta \cong 0$  유지하는 것이 독립진자의 문제이므로 (2)식을  $\theta = 0$  주위에서 선형화 하면  $\sin \theta \cong 0$ ,  $\cos \theta \cong 1$  이 된다.

( $\theta \dot{\theta}^2$ 은 무시) 그러므로 (1)식은 아래의 (3)식이 되고

$$F = (M + m) \ddot{x} + ml \ddot{\theta} \quad \text{----- (3)}$$

(2)식은 아래의 (4)식이 된다.

$$m \ddot{x} + ml \ddot{\theta} = mg \theta \quad \text{----- (4)}$$

(4)식으로부터

$$\ddot{x} = g \theta - l \ddot{\theta} \quad \text{----- (5)}$$

이 되고 (5)식을 (3)식에 대입하여 풀면

$$F = (M + m)(g \theta - l \ddot{\theta}) + ml \ddot{\theta}$$

위의 식을 정리하면

$$\frac{\theta(S)}{F(S)} = \frac{-1}{MS^2 - (M + m)g}$$

과 같은 독립진자의 전달함수를 얻을 수 있다.

### 3. Software 구성

소프트웨어는 크게 두개의 모듈로 구성하였는데 하나는 기본 명령어 모듈로 기본적인 기능의 명령어 작성 모듈이고 다른 하나는 제어 알고리즘(PID, FUZZY, H<sup>∞</sup> 제어기) 작성 모듈로 구성되어 main program 과 link 된다.

#### 1) 기본 명령어 모듈

기본적인 동작을 제어하는 명령어 모듈은 A/D Conversion, D/A conversion, w\_ritec (명령어 쓰기), w\_rited (data 쓰

기), w\_riteop (outport 쓰기), r\_eadip (inport 읽기) dstop, reset등의 11개 명령어로 프로그래밍 하였다.

#### 2) 알고리즘 모듈

PID, FUZZY, H<sup>∞</sup>알고리즘을 각각 작성하여 기본명령어 모듈과 link 시킴으로 각각의 제어실행 file을 작성하였다.

## 4. 제어 알고리즘

### 1) PID 제어

PID의 제어기를 포함한 시스템은 그림4와 같이 되고 여기서 매우 불안정한 독립진자 제어기 전달함수 G<sub>c</sub>(S)의 parameter K<sub>p</sub>, K<sub>d</sub>, K<sub>i</sub>를 구현하는 것이 PID제어기의 설계이며 제어기 전달함수 G<sub>c</sub>(S)를 넣음으로 폐루프의 전달함수가 안정하게 되고 rising time, overshoot steady state error 등의 성능이 설계치 내의 만족된 값으로 되어야 한다. 독립진자의 modeling을 한 후 이것의 극점(pole)과 영점(zero)의 위치가 어디인지 조사해보고 PID 제어기를 설계 후 안정화되는지 설계성능을 만족하는지의 여부를 time response등을 이용하여 확인한 후 PID제어기의 이득(gain) K<sub>p</sub>, K<sub>d</sub>, K<sub>i</sub>를 확정하였고 이를 실제 적용시 DC전동기의 기전력에 대한 K<sub>p</sub>, K<sub>d</sub>, K<sub>i</sub>값으로 환산하여 독립진자를 제어하였다. 설계사양은 상승시간이 100ms이내가 되도록 하고 오버슈트는 부드러운 제어가 되기 위해 가능한 줄이도록 0.5° 내인 경우로 구상하였고 정상상태 오차는 거의 없도록 정하여 설계하였다.

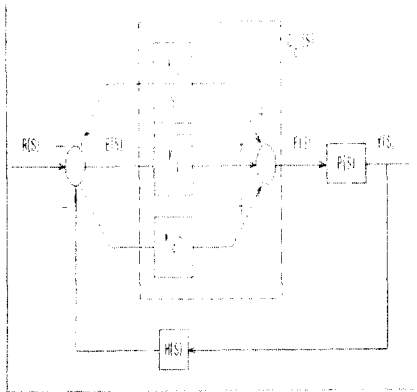


그림 4. PID 제어기를 포함한 도립진자 제어 선도

- R(S) : 기준 입력(reference input)
- E(S) : 오 차
- G<sub>c</sub>(S) : PID 제어기 전달함수
- F(S) : 입 력
- P(S) : 도립진자의 전달함수
- Y(S) : 출 력
- H(S) : 케 환 (feedback)

도립진자 시스템 자체는 극점을

$$\pm \sqrt{\frac{(M+m)g}{MI}}$$

에 갖는 불안정한 시스템 인 것을 알수있고 여기에 PID제어기를 포함하여 페루프의 전달함수를 구해보면 다음과 같다.

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K_d S^2 + K_p S + K_i}{MIS^3 + K_d S^2 + [K_p - (M+m)g] S + K_i}$$

K<sub>p</sub>, K<sub>d</sub> 및 K<sub>i</sub> 값을 찾기위해 먼저 설계 사양은 상승시간이 100ms이내가 되도록하고 오버슈트는 0.5° 내에, 정상상태 에러는 거의 없도록 구상한 후 아래와 같이 계산하였다. 먼저 페루프 시스템 그림3이 안정되기 위한 조건을 찾기위해 PID제어기를 포함한 전달함수에 Routh- Hurwitz 판별법을 이용해 보면 다음과 같다.

$$S^3 : \quad MI \quad [K_p - (M+m)g]$$

$$S^2 : \quad K_d \quad K_i$$

$$S^1 : \quad \frac{K_d [K_p - (M+m)g] - MIK_i}{K_d} \quad 0$$

$$S^0 : \quad K_i \quad 0$$

여기서 안정한 시스템이 되려면 우측의 첫 열의 부호가 모두 같아야 하므로 다음과 같은 2가지 조건을 만족해야 한다.

$$K_d > 0 \text{ and } K_i > 0 \text{ ----- (6)}$$

$$K_p > \frac{MIK_i}{K_d} + (M+m)g \text{ ----- (7)}$$

여기서 정상상태 오차가 거의 없도록 ramp입력에 대한 정상상태 오차상수 K<sub>v</sub>를 -150으로 잡으면 다음과 같이 된다.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{S + SG_c(S)P(S)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} SG_c(s)P(s) = \frac{K_i}{-(M+m)g} = K_v$$

$$K_i = 1176$$

PID제어기를 포함하여 Bode plot을 그려 보면 이득여유는 좋지않고 위상여유는 어느정도 만족된 값을 얻을 수 있다. 그러나 이득여유를 위해 PID 이득값을 조정하여 보면 다시 타임응답이 나빠지고 타임응답을 만족시키려면 다시 이득여유가 나빠지는 결과를 보이고 있어 이득여유, 위상여유, 타임응답을 동시에 맞추어 설계하기는 매우 어렵다. 또한 보다 정확한 K<sub>p</sub>, K<sub>d</sub>, K<sub>i</sub> 값을 수학적으로 찾기위해서는 위에서 구한 도립진자의 전달함수는 힘 F에 대해 구한것이기 때문에 이 힘의 제공원인 DC전동기의 기전력에 대한 전달함수로 바꾸기 위해서는 DC전동기의 모델링 부분이 그림 4에 첨부되어야한다. 그럴경우 페루프 시스템의 전달함수의 차수가 늘어 나게되고 DC전동기의 파라미터(parameter) 문제로

수학적인 접근은 더욱더 어렵게된다. 실제 시스템에 적용시는  $K_p$ ,  $K_d$ ,  $K_i$ 값이 많은 차이를 보이는데 그 이유는 다음 세가지로 요약될 수 있다. 첫째, 각도센서의 출력값은 전압이므로 이것을 각도센서의 분해능( $1^\circ = 6.111\text{mV}$ )을 고려하여 환산되어야 한다. 둘째 실제 DC전동기의 전압을 조정하는 것은 PWM회로의 기준전압이므로 이것에 대한  $K_p$ ,  $K_d$ ,  $K_i$ 값으로 바꾸어 져야된다. 셋째 DC전동기가 들어간 기전력에 대한 제어의 경우 이므로 DC전동기 자체의 극점(pole)과 영점(zero)의 영향으로 실제  $K_p$ ,  $K_d$ ,  $K_i$ 값과 차이가 난다. 그림5는  $0.1^\circ$  정도의 오버슈트를 확인하기 위해 크게 본것이고 실제로는 거의 오버슈트가 없는 경우로 생각된다. PID 제어를 구성한 후 실제 도립진자 제어에 적용한 결과 그림 5와같은 응답을 볼 수 있었고 여기에 왜란에 대한 실험을 위해 반으로 쪼개어 뚜껑을 열고 달을 수 있도록 만든 도립진자의 공 안에 무게가 약 130.8g, 직경이 3.18cm인 쇠공을 넣어 보았고, 자판기용 1회용 물컵에 물을 1/2 넣어 제어해 보았는데 그 결과는 [17]에서 얻을 수 있었다.

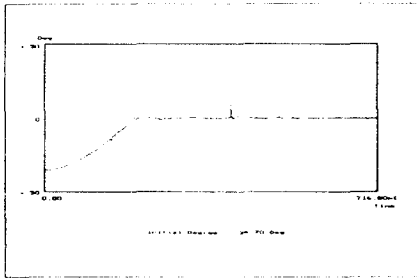


그림 5. 실제 도립 진자 제어시 봉의 각도

## 2) 퍼지(Fuzzy)제어 알고리즘

퍼지 제어기는 PID와는 달리 제어 대상의 수학적 모델링이 필요하지 않으나 대신에 제어대상의 상태를 알수있는 퍼지변수를 무엇으로 정할것인지, 또한 이 퍼지 변수에 대한 소속함수(member-ship function)의 영역을 어떤범위로 정할것인지, 제어규칙

(rule)은 어떻게 구성할지등을 정해야 한다. 이러한 퍼지제어기 구성은 PID제어를 해본 경험으로 소속함수의 영역과 제어규칙등을 구성하였다. 본 논문에서는 각도에 대한 정보를 얻기위해 입력 변수로  $V_{\theta\text{err}}$ (각도 오차에 대한 전압차)과 빠른 제어를 고려하기 위한 변수로 사용하기위해  $\Delta V_{\theta\text{err}}$ (각도오차 변화량에 대한 전압차)를 정의하고 출력 변수로  $U$ (제어입력)를 정의한후 이 퍼지변수에 대한 소속함수는 계산이 쉽도록 삼각형 형태의 모양으로 정하고 제어규칙은 가,감속을 고려한 부드러운 제어가 되도록 설계하였다. 또한 각퍼지 변수에 대한 퍼지영역은 비교적 세밀한 제어가 되도록 각각 7개의 언어 영역으로 분할하여 PL(positive Large), PK(positive medium), PS(positive small), ZE(zero), NS (negative small), NM(negative medium), NL (negative large)로 구성하였다.

### 가) 퍼지 변수 구성

각도 센서로 부터 읽은 각도에 대한 전압은 A/D 변환기를 거쳐 수직에 대한 값과 비교하는 방법으로 퍼지 변수를 정의하였다.

$$\Delta V_{\theta\text{err}} = V_{\theta\text{err}}[(n-1)T] - V_{\theta\text{err}}[nT] \quad [\text{V}]$$

$$V_{\theta\text{err}} = \text{Vert.} - V_{\theta}[nT] \quad [\text{V}]$$

### 나) 소속 함수 구성 및 영역 분할

퍼지 변수  $V_{\theta\text{err}}$ ,  $\Delta V_{\theta\text{err}}$ ,  $U$ 에 대하여 각 퍼지변수 영역을 7개씩 분할한 후 다시 각각의 소속함수 영역을 정의하였는데 여기서 소속함수 영역의 크기가 작은 이유는 각도센서의  $1^\circ$ 에대한 분해도(resolution)는 6.111mV이기 때문에 각 퍼지변수 영역의 값이 작은 형태를 나타내고 있다. 아래의 퍼지변수  $V_{\theta\text{err}}$ ,  $\Delta V_{\theta\text{err}}$ 의 소속 정도(membership grade)는 퍼지 변수의 값에 따라 다음과 같이 일반화된 식으로 err\_mem 함수에서 계산 하고 있다.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 0, & x < x_1 \\ &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ &= \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &= 0 & x > x_3 \end{aligned}$$

위와 같이 제어 입력 U의 모양이 0에 가까울수록 LP가 된 이유는 DC전동기를 PWM으로 제어하는 과정에서 power단에 있는 FET의 Gate단자를 높은 전압으로 스위칭하기 위해 FET 한 단을 더 넣음으로 PWM의 기준 입력(Reference input)이 약 9[V] 이상 일 때 정지 상태가 되고 0[V]일 때는 최대출력이 되는로 설계하였기 때문이고 제어입력 U의 +, - 부호는 무게중심법에 의해 비퍼지화 (Defuzzification)시 DC모터의 회전 방향을 결정하여 제어하는데 사용한다. 마찬가지로 비퍼지화한 제어입력 U의 값이 ±9[V] 이상은 정지를 의미하므로 제어입력 U의 ZE 모양이 두 곳에 만들어 졌고 이 두개의 ZE 소속함수는 V<sub>θ<sub>err</sub></sub>값의 부호에의해 하나가 선택되어 지도록 프로그래밍하였다. 또한 제어입력 U의 모양이 직각 삼각형으로 잡은 이유는 퍼지 변수 V<sub>θ<sub>err</sub></sub>, ΔV<sub>θ<sub>err</sub></sub>의 소속 정도 (Membership Grade) 값에 따라 비퍼지화된 제어입력 U의 값이 적절한 변화를 줄 수 있도록 하기 위해 직각 삼각형으로 하였다.

다) 제어 규칙 구성

제어 규칙은 퍼지 변수 V<sub>θ<sub>err</sub></sub>, ΔV<sub>θ<sub>err</sub></sub>를 7개씩 잡았으므로 모두 49개의 규칙이 있을 수 있으나 이것이 모두 필요치는 않으므로 비교적 제어 규칙이 간단하게 되도록 아래 표 1과 같이 33개의 규칙으로 구성하였다.

$V_{\theta_{err}}$ / $\Delta V_{\theta_{err}}$	LP	MP	SP	ZE	SN	MN	LN
LP	LP		SP		MN		
MP		MP	SP	SN	SN	MN	
SP		MP	MP	SN	MN		MN
ZE	LP	MP	SP	ZE	SN	MN	LN
SN		MP	MP	SP	MN		MN
MN		MP	SP	SP	SN	MN	
LN			MP		SN		LN

표 1. 퍼지 제어 규칙도

위의 제어 규칙도(rule map)는 인간이 생각하는경험을 근거로 아래의 예문과같은 언어적인 규칙을 정한 후 이를 모아 제어 규칙도를 작성한 것이며 되도록 각 제어규칙의 구조가 간단하도록 “or”가 들어가는 규칙은 “and”로 분리하였고 “and”계산은 계산이 편하도록 Zadeh의 “and” 계산방법으로 두 퍼지변수의 최소값을 취하는 min(V<sub>θ<sub>err</sub></sub>, ΔV<sub>θ<sub>err</sub></sub>)를 사용하였다.

라) 비 퍼지화 방법

비 퍼지화 방법은 일반적으로 사용하는 무게 중심법으로 정하였고 제어입력 U의 소속함수 모양이 직각 삼각형이 되게 선택한 이유는 이동변 삼각형으로 잡을 경우 비 퍼지화시 각 제어 규칙의 결론부에 해당된 이동변 삼각형의 중심선에 의해 x1, x2로 고정되고 제어 규칙에 위한 조건부에 해당되는 소속함수의 소속 정도(Membership Grade)μ(x1), μ(x2) 값들만이 변해 최종 비 퍼지화 된 제어입력 U를 결정하게 된다. 그러나 직각 삼각형으로 잡을 경우는 각 제어 규칙 구조를 비교적 간단하게 하는 대신에 해당되는 제어입력 U의 값 x1, x2들도 중심선을 따라 고정된것이 아니라 μ(x1), μ(x2)에 따라 변화하여 소속함수의 소속정도(Membership Grade)의 값에따라 적절한 변화를 줄 수 있게 된다. 따라서 이러

한 이유 때문에 직각 삼각형으로 선택하여 사용하게 되었고 이를 이용하여 (b)와 같은 직각삼각형 모양으로 퍼지 변수 제어 입력  $U$ 를 정의하고 비 퍼지화 하여 제어 입력  $U$ 의 값을 결정하였다. 위와 같이하여 구성된 퍼지 제어기를 Turbo.C 2.0 으로 프로 그래밍한후 도립진자에 적용하여 실험한 결과 그림 6과 같이 얻을 수 있었고 여기에 왜란 실험을 하기위해 PID왜란 실험에 사용한 쇄공과 물을 담은 컵을 넣은 경우 그림 7과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

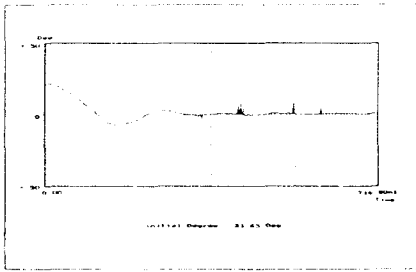


그림 6. 퍼지 제어 결과

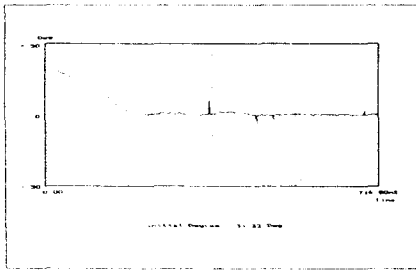


그림 7. 쇄공을 넣었을 때의 결과

퍼지제어기는 약 120ms~150ms의 상승 시간과 약  $5^\circ \sim 7^\circ$  정도의 오버슈트를 가지고 대략 180 ms정도면 안정상태에 도달하는 결과를 보였는데 퍼지제어기는 제어 규칙을 어떻게 구성하는가에 따라 또한 퍼지변수의 영역을 어떻게 정하는가에 따라 많이 달라지는 결과를 보였고 수학적으로 최적한 제어규칙을 찾아 내는 것이 힘들음을 알 수 있었다. 또한 결과 그래프 및 실제 세우는 모습을 관찰해 보면PID제어기와는 달리 상승시간, 오버슈트, 정상상태 오차, 안

정시간 등이 왜란에 대해 거의 무관하게 일정하게 나타남을 볼때 왜란에 대해 민감하지 않은 것을 알 수있었고 이는 퍼지제어기 설계시부터 제어대상의 모델링 자체가 필요 없기에 당연한 결과로 생각되어지고 왜란이 심한 환경의 제어에 잘적용 될 수 있음을 나타냈다.

### 3) $H^\infty$ 제어 알고리즘

보드 플롯(Bode plot), 나이퀴스트 곡선(Niquist plot) 등을 이용한 기존의 고전적인 제어기의 설계(design) 방법으로는 이득 여유(gain margin)와 위상 여유(phase margin)를 고려하면서 시간 응답(time response)을 통한 설계성능(performance)까지 만족시키도록 동시에 직접 설계 하기는 쉽지않으며 특히 measurement noise와 process noise가 있는 MIMO시스템의 고전적인 LQR(Linear Quadratic Regulator) 문제의 경우 비록 LQR에 의한 제어기가 이득여유, 위상여유는 좋지만 모든 상태변수(state variable)의 궤환(feed back)이 이루어 져야 가능하기 때문에 고전적인 제어기 설계 방법으로는 강인성을 가지며 설계성능을 만족시키는 제어기 설계에 많은 어려움이 있게된다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도는 계속 진행되어 왔으며 1960년대경 Kalman-Bucy[1]는 noise가 gaussian 분포의 형태를 갖는 통계학적 정보가 있다는 가정하에 노이즈 상황하에서도 상태변수를 측정할 수 있는 estimator를 구성한 이론을 전개 시켰고 이를 근거로 최적화 기법에 적용하여 상태변수 estimator를 기반으로 한 LQG (Linear Quadratic Gaussian)문제를 풀어 제어기를 구성하는 기법이 나타나게 되었다. 그러나 LQG문제에 의한 제어기는 제어 대상의 모델링이 첨가 되었을때 모델링(moleling)의 불확실성(uncertainty) 보다는 최적화한 제어에만 주안을 두었기 때문에 강인성 측면에서 약한 결과를 보였다는 몇몇의 논문이 잇달아 발표되면서 부터 이러한 문제를 해결하기 위해 1980년대경 다시 고전적인 제어기 디자인 기법을 MIMO 시



시스템에 까지 넓혀 쓸 수 있도록 몇몇 학자들에 의해 root locus는 characteristic locus로 Nyquist기법은 Niquist array로 Bode plot은 singular value plots으로 재전개되어 MIMO 시스템 설계에 이용되도록 하였으며 이에 힘입어 LQG 제어기 형태를 가지면서 LQG 제어기가 가진 문제점을 해결할 수 있는 새로운 디자인 기법인 LTR (Loop transfer recovery)방법과 G.zames에 의해 최초로 제안된 H<sup>∞</sup> 이론이 나타나게 되었다[5]. H<sup>∞</sup> 이론에 근거한 제어기 설계의 주안점은 노이즈 입력에 대한 출력의 전달함수 T<sub>Zo</sub>의 infinite norm이 어느 정도의 γ 값보다 작게 유지할 수 있는 제어기, 다시 말해 노이즈에 대해서는 강인성(robust stability)이 보장되고 설계성능을 만족 시키는(robust performance)것이 주안점이 된다.

가) State Space 에서의 Modeling

PID 제어기에서 구한 도립진자의 모델링에서 cart 위의 봉에 왜란 w가 가해지고 각도센서의 측정시 noise v가 있다고 가정하고 도립진자를 state space에서 새로이 모델링 해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F &= (M+m)\dot{x} + ml\ddot{\theta} \\
 \dot{x} + l\ddot{\theta} - g\theta &= \frac{w}{m} \\
 \ddot{\theta} &= \frac{(M+m)g}{Ml}\theta + \frac{M+m}{Mlm}\omega - \frac{1}{Ml}F
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

여기서  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ 로 놓으면 다음과 같은 state space 모델을 얻을 수 있게 된다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M+m}{Mlm} \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} F
 \end{aligned}$$

$$\text{-----} \tag{4}$$

$$y = x + v \text{-----} \tag{5}$$

위의 (4),(5)식으로부터 standard H<sup>∞</sup> 문제의 형태로 바꾸어 보면 다음과 같은 계수의 행렬을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{M+m}{Mlm} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 C_2 &= [ 1 \ 0 ] \quad D_{21} = [ 1 \ 0 ] \quad D_{22} = [ 0 ]
 \end{aligned}$$

위의 계수 행렬중 C<sub>1</sub>과 D<sub>12</sub>가 위와 같이 나온 이유는 regulated output  $Z = [ Y_r \ F ]^T$ 로 잡았기 때문이고(Y<sub>r</sub>=θ) 이는 DC전동기와 도립진자 봉의 각도를 같이 regulate하는 최적화의 관점으로 제어기를 설계하기 위함이다. 위의 행렬을 종합하여 이것을 packed된 형태의 system matrix로 표현하면 다음과 같이 된다[14].

$$I_{p \times p} \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & \frac{M+n}{Mlm} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

나) H<sup>∞</sup> 제어기 구현

모든 노이즈 입력 Ω에 대해 페루프를 안정화 시킬 수 있는 H<sup>∞</sup> 제어기를 구성하기 위해서는 Filter Riccati, Control Riccati 식을 풀어야 하고 이 두개의 Riccati식에 대한 해를 풀기 위해서 다음과 같은 4개의 가정을 한다[6][7][8][9].

- A.1 (A, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>)가 stabilizable 하고 detectable해야 한다.
- A.2 rank(D<sub>12</sub>) = dim(u), rank(D<sub>21</sub>) = dim(y)
- A.3
- rank  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \dim(x) + \dim(y)$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = \dim(x) + \dim(y) \text{가}$$

모든 주파수에 대해 만족해야 한다.

A.4  $D_{11} = 0, D_{22} = 0$

위에서 A.1의 가정은 페루프를 안정화시킬 수 있는 제어기가 존재하기 위한 조건이고 A.2는 제어기가 proper(분모의 차수  $\geq$  분자의 차수)하기 위한 조건이 된다. 또한 A.3의 가정은 모든입력 (R(S),  $\omega$ (S),  $\nu$ (S))에 대한 페루프 전달함수가 존재하기 위한 조건이며 A.4는 꼭 필요하지는 않지만 만족될 경우 두개의 Riccati식이 간결화되기 때문이다. 위의 A.1~A.4의 가정 아래 두개의 Riccati식은 복잡하므로 간단히 하기위해 다음과 같은 Hamiltonian matrix

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \text{를 이용하여}$$

$$A'x + xA - xRx + Q = 0 \text{----- (4)}$$

(4)와 같은 Riccati 식에 대입할 경우로 바꾸어 표현하면 (4)의 해는  $x=\text{Ric}(H)$ 와 같은 형식으로 표현된다. 그러므로  $H^\infty$ 이론에 의한 두개의 Riccati식에 대한 해를 위 (4)식을 이용하여 위와 같은 Hamiltonian matrix로 표현 하면 아래의 (5), (6)식과 같이 된다[6][7][8][9][14].

$$X_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} A - B_2 \widehat{D}_{12} D_{12}' C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 \widehat{D}_{12} B_2' \\ -\widehat{C}_1' \widehat{C}_1 & -(A - B_2 \widehat{D}_{12} D_{12}' C_1)' \end{bmatrix} \text{----- (5)}$$

$$Y_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}' \widehat{D}_{21} C_2)' & \gamma^{-2} C_1' C_1 - C_2' \widehat{D}_{21} C_2 \\ -\widehat{B}_1' \widehat{B}_1' & -(A - B_1 D_{21}' \widehat{D}_{21} C_2) \end{bmatrix} \text{----- (6)}$$

$$\widehat{C}_1 = (I - D_{12} \widehat{D}_{12} D_{12}') C_1$$

$$\widehat{B}_1 = B_1 (I - D_{21}' \widehat{D}_{21} D_{21})$$

위의 식 (5), (6)의 해  $X_\infty, Y_\infty$ 가 다음과 같은 (7), (8), (9)식을 만족하면  $\Omega$ 에 대한 regulate된 출력 Z의 전달함수  $T_{Z\Omega}$ 의 infinite norm은  $\gamma$  값 보다 작게 된다. 즉,

$$X_\infty > 0 \text{----- (7)}$$

$$Y_\infty > 0 \text{----- (8)}$$

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \text{----- (9)}$$

$\rho(X_\infty Y_\infty) = (X_\infty \times Y_\infty)$ 의 eigenvalue의 가장 큰 실수값

$\|T_{Z\Omega}\|_\infty < \gamma$ 을 만족시키며 모든 노이즈  $\Omega$ 에 대해 페루프 시스템을 안정시킬 수 있는  $H^\infty$  제어기가 존재하게 된다.

먼저 A.1, A.2의 가정이 만족되는 것을 확인한 후 프로그램시 꼭 필요한 A.3, A.4 조건을 검색하고, Hamiltonian matrix 형태로 (5), (6)을 풀고 해  $X_\infty, Y_\infty$ 에 대해 (7), (8), (9)조건을 검색하여 조건이 만족되는지 확인한 후 여기서 구한 제어기 Gc(S)를 넣어 페루프가 안정화 되는지 페루프의 극점을 조사하고 이를 simulation하게끔 프로그래밍하였다. 이 상태에서  $\gamma$ -iteration 방법으로  $\gamma$  값을 찾아야 하는데  $\gamma$  값은 100에서 부터 시작하여 페루프가 불안정하게 되기 직전의  $\gamma$  값을 반복시켜 찾아 나왔다.

$\gamma$	$X_\infty > 0$	$Y_\infty > 0$	$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$	페루프 시스템
100	Y	Y	Y	S
50	Y	Y	Y	S
25	Y	Y	N	U
35	Y	Y	Y	S
30	Y	Y	N	U
33	Y	Y	Y	S
31	Y	Y	N	U
32	Y	Y	N	U
32.8	Y	Y	Y	S

주: S=Stable, U=Unstable, Y=Yes, N=No

표 1.  $\gamma$  값에 따른 결과

그때의  $\gamma$  값은 다음 표1과 같이 되었고 최종  $\gamma$  값을 32.8로 정하였다. 위의 표는  $\gamma$  값 32부터도 몇 번의 반복을 거쳐 소수

점 첫째 짜리 까지 구한 결과 이다. 위에서 구한  $\gamma$  값을 가지고 구한 H<sup>∞</sup> 제어기는 다음과 같은 결과를 가지게 되며

$$G_c(S) = \frac{C(S+D)}{S^2 + aS + b}$$

$$\begin{aligned} a &\cong 2.6796 \times 10^4 & D &\cong 5.715 \\ b &\cong 4.6640 \times 10^4 & C &\cong 8.72362 \times 10^4 \end{aligned}$$

위에서 구한 제어기 G<sub>c</sub>(S)는 노이즈 입력에 대해 ||T<sub>z<sub>o</sub></sub>||<sub>∞</sub> < γ 을 만족 시키고 페루프 시스템을 안정화 시킬 수 있지만 G<sub>c</sub>(S)를 넣고 타임응답을 살펴보면 다음과 같이 step입력에 대한 정상상태 오차가 ≅ 2.76° 정도 된다.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{SR(S)}{1 + G_c(S)P(S)} \cong 2.76^\circ \quad (11)$$

그러므로 설계사양 중 정상상태 오차를 만족시키기 위해 G<sub>c</sub>(S)앞에 K를 넣어 식 (11)로부터 아래와 같이 step입력에 대한 오차가 0.1° 정도 되도록 정하여 K에 대해서 풀면 정상상태 오차를 줄일 수 있게 된다.

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(S)P(S)K} \cong 0.1^\circ$$

∴ K ≅ 8.0879 정도가 된다.

∴

$$H^\infty \text{ 제어기} = G_c(S)K = \frac{KC(S+D)}{S^2 + aS + b}$$

그러나 정상상태 오차를 줄이기 위해 구한 K를 G<sub>c</sub>(S)앞에 넣을 경우 각 입력(R, ω, ν)에 대한 총 전달함수를 구해보면 측정 노이즈 ν까지 K배 만큼 커지게 된다. 그러므로 노이즈까지 K배 증폭되는 현상을 방지하기 위해서는 똑같은 K를 이용하여 측정 노이즈 ν앞에 1/K를 넣어 주어야 된다. H<sup>∞</sup> norm을 이용하여 H<sup>∞</sup>제어기와 페루프 시스템을 설계할 수 있었고 H<sup>∞</sup>제어기를 포함한 도립진자 페루프 시스템의 regulate된 출력은 다음 식(12)와 같이 된다.

Y<sub>r</sub>(S)는 regulate된 출력이고 ω(S)와 ν(S)는 랜덤(random)하게 무작위로 넣었으며 기준 입력 R(S)는 Step 및 sin형태로 준 결과이다. 맨 윗 상단은 랜덤한 왜란 ω이고 중간단이 노이즈(noise) ν이며 끝단은 regulate된 도립진자 봉의 각도 출력 Y<sub>r</sub>(=θ)을 나타내고 있다.

$$Y_r(S) = \frac{P(S)}{1+P(S)} (R(S) - \frac{\nu(S)}{K}) + \frac{P(S)}{1+P(S)} \omega(S)$$

where  $\widehat{P}(S) = G_c(s)P(s)K$  ----- (12)

### 5. 결 론

왜란과 노이즈가 심한 열악한 환경에서도 강인성과 설계 성능을 만족시킬 수 있는 제어기를 설계할 수 있다는 것은 큰 장점이 되며 산업 현장의 응용 시에도 뛰어난 효과를 볼 수 있게 된다. 본 논문은 이러한 취지 아래 제어기 설계 방법에 잘 이용되는 PID에 대해서는 실제 도립진자를 이용하여 노이즈에 대한 실험과 동시에 H<sup>∞</sup> 제어기와 비교를 위해 Simulation방법으로 실험하였고 Fuzzy이론에 의한 제어기는 수학적 모델링이 첨부되지 않는 방법이므로 고전적인 제어기 설계 기법으로는 해석되지 않기 때문에 실제 도립진자에만 적용시켜 보고 Simulation은 하지 않았다. 또한 노이즈에 매우 강하면서도 잘 알려지지 않은 H<sup>∞</sup>이론을 이용하여서는 Simulation방법으로 실험해 보았는데 PID제어기와 H<sup>∞</sup>이론에 의한 제어기를 똑같이 Simulation방법으로 노이즈에 대해 실험한 결과 PID제어의 경우 왜란에 매우 민감하게 반응하는 것을 알 수 있고 H<sup>∞</sup>이론에 의해서 제어기를 설계할 경우는 노이즈에 대한 확실한 안정성을 보장받을 수 있기 때문에 이것을 이용하여 설계 성능도 만족시키는데는 어려움이 별로 없게 된다. 실험 결과 고전적인 설계 방법으로는 설계성능을 만족시키면 안정도 여유가 떨어지고 안정도를 조금 개선 시키려면 설계성능이 문제가 되는

것을 확인하게 되었다. 즉 PID제어기를 고전적인 방법으로 설계시에는 PID제어기 자체의 전달함수 모양(분모1차, 분자2차의 모양)은 정해져 있고 단지 PID의 게인(Gain)만을 바꾸어 안정도와 설계성능을 맞추거나 혹은 제어대상 시스템의 극점(pole), 영점(zero)의 상쇄 효과를 고려하여 맞추려 하기 때문이지만  $H^\infty$ 이론에 의해 설계시 Mixed Sensivity 문제로 접근할 경우 Weighted된 전달함수  $W_s, W_t$ 를 이용하여 제어기의 전달함수 모양이 정해지지 않은 풍부한 설계방법을 이용할 수 있고 Standard  $H^\infty$  문제로 접근할 경우도 제어기 자체의 전달함수 모양이 정해져 설계하는 것이 아니기 때문에 노이즈에 대해 안정도를 높이며 설계 성능을 만족시킬 수 있을 뿐 아니라 Estimator 설계도 바로 구할 수 있기 때문에 Signal 처리에도 좋은 효과를 볼 수 있다 [10][12][13].  $H^\infty$ 이론에 의한 제어기 설계가 이렇게 강인성이 보장되는 이유는 다른 제어기와는 달리  $H^\infty$  제어기의 경우 왜란과 측정 노이즈에 대해 출력되는 상태변수를 그대로 사용하는 것이 아니라 독특한 Estimator가 구성되어 상태 변수를 추적하여 사용하기 때문에 왜란이나 노이즈에 대해 강인성을 보장해 주기 때문이고 이는 보드 plot을 그려보면 알 수 있듯이 위상 곡선이 볼록한 형태의 모양을 가지므로 위상 여유가 만족된 상태에서 주파수가 높아짐에 따라 이득여유가 증가하는 결과를 만들어 주기 때문이다 [6-11][12][13]. 그러나 PID의 경우도 실제 도립진자에 왜란을 준 결과 본 논문에서 사용한 쇄공과 컵에 있는 물 정도의 왜란에는 잘 세워짐을 알 수 있었고 이는 PID 자체에도 어느 정도의 강인성이 있음을 나타낸다. 퍼지 제어기의 경우는 제어기의 수학적 전달함수로 표현하는 것이 불가능 하기 때문에 Simulation은 할 수 없었으나 실제 도립진자에 적용한 결과를 보면 왜란 또는 측정노이즈에 무관하게 거의 일정한 정상상태 오차, 오버슈트, 안정되는 시간등을 얻을 수 있었고 이는 퍼지제어기의 경우도 왜란에 무척 강하다는 것을 의

미하여 준다. 또한 제어규칙 및 소속함수를 정하는 설계자에 따라 더 좋은 성능을 얻을 수 있으나 최적한 규칙을 정형적인 접근에 의해 찾기는 매우 힘들음을 나타낸다. 퍼지제어기의 경우 제어대상에 대한 수학적 모델링이 불필요한 대신에 제어규칙 퍼지변수의 소속함수 영역을 정하는 데는 제어대상에 대한 전문적인 경험이 있어야 함을 알 수 있고 이러한 경험이 없이는 수많은 시행착오(Trial-error)의 방법을 이용할 수 밖에 없다. 그러나 실제 대부분의 현실적인 시스템이 비선형 시스템이라는 것을 감안할 때 이러한 점은 비선형 시스템의 경우에는 제어기 설계에 큰 장점을 줄 수 있게 된다. 실험결과로부터 각 제어기에 대해 표 2 와 같은 장단점을 얻을 수 있었다. 왜란이 존재하는 경우 출력에 미치는

영향은  $\frac{P(S)}{1 + G_c(S)P(S)K} \omega(S)$ 의 형태로

제어기 자체까지는 영향을 미치지 않으나 폐환(feedback)이 이루어지는 측정 노이즈에 의한 출력의 영향은  $\frac{G_c(S)P(S)}{1 + G_c(S)P(S)K} v(S)$

의 형태로 제어기 자체에 까지 영향을 주어 나타나게 되기 때문이고 이로부터 측정 노이즈를 어느정도 줄일 수 있으면 어느 제어기 설계방법이든 이용범위를 넓힐 수 있으나 측정노이즈까지 심한 열악한 환경에서는 상태변수의 Estimator를 사용하는  $H^\infty$ 제어기나 퍼지제어기등의 이용이 적절하고 Filtering과 같은 상태변수의 추적을 요하는 제어기 설계, 응용에 있어서는  $H^\infty$ 이론에 의한 제어기 설계방법이 적절하다 [10][12] [13]. 아직까지 잘 알려지지 않은  $H^\infty$ 이론에 의한 제어기 설계기법이 산업현장의 열악한 환경아래 더욱더 신뢰성과 강인성을 만족시켜 줄 수 있을 것이며 Motor Control, Robot Control, Sensor Interface, Signal Processing 등과 같이 적용분야는 다양할 것으로 기대된다.

	장 점	단 점
PID	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 제어기 설계가 용이.</li> <li>• 최적제어가 가능.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 제어대상의 수학적 모델링이 필요.</li> <li>• 비선형 시스템에 불리함.</li> <li>• 강인성이 약하다.</li> <li>• MIMO제어기 설계에 어려움</li> </ul>
FUZZY	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 제어대상의 모델링 불 필요</li> <li>• 비선형 시스템에 적합</li> <li>• MIMO제어기에 적합.</li> <li>• 강인성 좋다</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 제어대상에 대한 전문가적 지식 또는 경험이 필요.</li> <li>• 최적 제어기 설계가 어려움</li> </ul>
H <sup>∞</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 강인성 좋다</li> <li>• 최적제어가 가능.</li> <li>• MIMO제어기에 적합.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 제어기 설계가 어렵다.</li> <li>• 제어대상의 수학적 모델링이 필요</li> </ul>

표 2. PID, FUZZY, H<sup>∞</sup> 제어기의 장·단점 비교

### 6. References

[1] Kalman, R.E. and R.S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory" ASME trans. (J of Basic Eng), vol. 83 D, Mar. 1961, pp. 95-128.

[2] A.E. Bryson, JR and D.E. Johansen, "Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise" IEEE trans. on automatic control January

[3] Edison TSE and Michael, Athans, "Optimal minimal-order observer-estimators for discrete linear time-varying systems" IEEE trans. on automatic control, vol. AC-15, no. 4, August, 1970.

[4] Takeshi Yamakawa "A Fuzzy inference engine in nonlinear analog mode and its application to a Fuzzy logic control" IEEE trans. on neural net. vol. 4, no. 3, May 1993.

[5] G. zames "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse" IEEE trans. on automatic control, vol AC-26, pp. 301-320. 1981.

[6] Pramod P. Khargonekar "State space H<sup>∞</sup> control theory" Tech. report department of electrical engineering and computer science the university of Michigan Ann arbor, Jan 1990.

[7] R. Ravi, K.M. Nagpal, P.P. Khargonekar "The H<sup>∞</sup> control problem for linear time-varying systems" NSF Tech. report February 1990.

[8] P.P. Khargonekar, Krishan M, Nagpal, Ka meshwar Poolla "H<sup>∞</sup> control with transients" Tech. report, January 1990.

[9] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis "State-space solutions to standard H-2 and H<sup>∞</sup> control problem" IEEE trans. on automatic control, vol. 34, no. 8, August 1989.

[10] K.M. Nagpal, P.P. Khargonekar, "Filtering and smoothing in an H<sup>∞</sup> setting" IEEE trans. on automatic control, vol. 36, no. 2, February 1991

[11] Yaesh and U. Shaked "A transfer function approach to the problems of discrete-time system: H<sup>∞</sup> optimal linear control and filtering" IEEE trans. on automatic control vol. 36, no. 11, November 1991.

[12] Hansil Kim "Observer - Based estimation and stochastic control" Phd. Dissertation, West Virginia University, 1992.

[13] Ali A. Jalali, Hansil Kim, Craig S. Sims "Filtering in a discrete H<sup>∞</sup> setting" Systems and Control letters. Oct. 1992.

[14] Michael G. Safonov, D.J.N. Limebeer, R. Y. Chiang "Simplifying the H<sup>∞</sup> theory via loop-shifting, matrix-pencil and descriptor concepts" INT. J. control vol. 50, no. 6, pp. 2467-2488, 1989.

[15] Cheng-chih chu, John C. Doyle "The general distance problem in H<sup>∞</sup> synthesis" 24th conference on decision

and control December 1985.

- [16] R.Gurumoorthy, S.R.Sanders "Controlling Non- minimum phase nonlinear systems - The inverted pendulum on a cart example", ACC, 1993.
- [17] 김한실, " $H^\infty$ 를 이용한 필터 및 제어기 개발", 교비 연구 보고서, 1995.