

## 판 및 보강평판의 좌굴해석

함 원 국  
조선 및 해양공학과

### <요 약>

본 논문은 사변 단순지지하에서 일축 및 이축 압축하중을 받는 판과 보강 평판의 좌굴 해석을 위하여 준 해석적인 방법(Semi-analytical Method)을 이용하였고 이를 컴퓨터를 이용한 수치해석법을 사용하여 해를 얻었다. 여기 사용된 준 해석적인 방법은 Ritz법을 기초로 하였고, Mindlin평판 이론을 적용함으로써 전단변형의 효과를 고려에 넣었다.

특히 종래의 해석적인 방법과 본 논문의 차이점은 종래의 방법이 Kirchhoff판 이론을 근거로 평판 처짐변위  $w$ 에 대한 경계조건을 만족하는 함수를 하나 가정하였으나 여기서는 평판이론에 근거하여 변위와 중립면에서의 회전을 나타내는 3개의 변위함수를 독립적으로 가정하여 정식화 하였다.

본 논문에 의한 결과치들은 고전적인 방법과 유한요소법에 의한 결과치들과 잘 일치하며 전산시간면에서는 오히려 유한요소법보다 유리한 방법임을 확인하였다. 일반적으로 비교적 두께가 두꺼운 평판의 경우는 mindlin평판으로 가정한 해석결과가 고전적인 박판해의 결과치보다는 낮은 좌굴하중을 나타냄을 알았다.

---

## Buckling analysis of plate and stiffened plate by Ritz method using mindlin's plate Theory

Ham, Won-Kuk  
Dept. of naval architecture shipbuilding and Ocean Engineering

### <ABSTRACT>

A semi-analytical method is formulated for the buckling analysis of plates or stiffened plates subjected to uniaxial or biaxial compression with all the

edges simply supported and computer program has developed based on this method.

The present method is based on Ritz method and the effects of shear deformation to buckling loads is considered by applying Mindlin's plate theory.

In the present method, the rotational displacement  $\theta_x$  and  $\theta_y$  are involved as the variables which are independent of the lateral deflection  $w$ . This is the different point from the other analytical method based on Kirchhoff's plate theory in which lateral deflection only is taken into account.

The present results show good agreement with those obtained by the classical analysis or by finite element method. Comparison of the present numerical results has been made with those by the finite element for stiffened plate under uniaxial and biaxial compressive load and simply supported boundary condition.

In general, it is found that the present numerical method gives lower buckling load than those obtained by the classical plate theory. For the stiffened plates, equi-distant stiffeners parallel to the loading direction are more effective when comparing with those perpendicular to the loading direction. When the height of stiffeners is over a certain value, stiffeners perpendicular to the loading direction act as a panel braker only rather than the means of increasing buckling loads.

## 1. 서 언

선체구조는 박판과 보강재의 결합으로 이루어진 복잡한 구조물로 파도나 적재화물로 인한 압축이나 전단력의 발생으로 좌굴을 일으키게 된다.

평판이나 보강판의 좌굴문제는 오래전부터 그 중요성이 인식되어 많은 연구가 행해져 왔다. 평판좌굴에 대한 고전적 해석방법을 문헌 1)2)3)에서 볼 수 있고 비교적 두꺼운 평판에 대한 것으로는 Mindlin의 평판이론을 사용한 E. Hinton의 유한대판법으로 4)5) 그리고 S. Srinivas와 A.K. Rao가 3차원 요소를 사용하여 유한요소법으로 다루었다. 7)

본 논문에서는 평판 및 보강판 전체의 거동과 경계조건을 만족하는 변위함수를 가정하는 에너지법의 일종으로서 Ritz의 방법을

적용하여 Mindlin의 판이론에 기초하여 해석을 수행하였다. Ritz의 방법은 유한 요소법을 적용하는 것보다 시간과 노력면에서 유리하다.

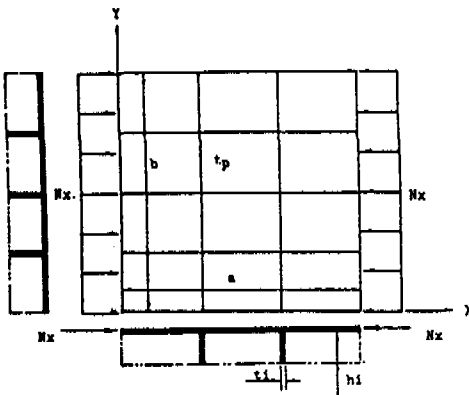
또한 박판으로부터 후판에 이르기까지 중횡비를 변화시켜가며 일축 및 이축 압축하중에 대하여 그리고 보강판에 대하여는 4변단순지지 상태에서 일축 압축하중을 받을 경우, 하중방향과 평행하게 배치된 보강재와 이에 직교하는 경우와 위의 두 가지 경우를 동시에 갖는 보강판의 3가지 경우를 검토하였다.

얇은 판의 경우는 문헌 1)2)3)에서의 결과와 잘 일치하며 비교적 두꺼운 판에 대한 Mindlin의 판이론에 기초하여 E. Hinton 4) 5)이 shear effect를 고려한 결과와도 매우 만족한 일치를 나타냈다. 보강판의 경우도 문헌 1)3)의 고전적 결과와 비교한 결과 매우 높은 정도의 결과를 주는 것을 확인하였

다. 그러므로 본 논문에서 제안한 방법은 4 변 단순지지 하에서의 좌굴해석에는 매우 효과적이라 생각된다.

## 2. 개요

선체구조를 형성하는 대부분의 구조물은 다른 수치에 비하여 얇은 판에 해당하나 보강재의 높이에 따라 좌굴의 정도는 달라진다.



본 논문에서는 평판을 2차원적으로 해석, Mindlin 평판이론을 적용하고, 보강재는 Timoshenko 보이론을 적용하였고, 판과 보강재를 별개로 하여 판이 좌굴변형을 일으킬 때의 보강재의 저항은 무시하였다.

그림 1에서와 같이 면내하중을 받는 평판 및 보강재의 좌굴변형 에너지를 고찰하고 이것을 최소 포텐셜 에너지 원리를 사용하여 좌굴해석을 하였다.

- $a=1,200$  : 판의 가로길이
- $b=1,200$  : 판의 세로길이
- $t_p=12.0$  : 보강재의 두께
- $t_i=12.0$  : 보강재 두께
- $h_i$  : 보강재 높이
- $N_x, N_y-N_{xy}$  : 판의 단위길이당 하중

Fig 1. Orthorhombically Stiffened Square Plate.

비교적 두꺼운 평판의 2차원적 해석을 위하여 그리고 보강판의 해석을 위하여 아래와 같은 가정을 도입하였다.

1. 평판의 재료는 완전 탄성체로서 등질, 등방성이며 Hooke의 법칙이 적용된다.
2. 판의 중립면의 변형은 무시하고 휨에 의한 변위만을 고려한다.

3. 평판두께 방향의 변형은 무시하고 변형은 판 두께에 비해 작은 것으로 한다.
4. 평판의 중립면에 작용하는 전단력은 평판 자체에만 국한한다.
5. 평판 좌굴시 보강재의 비틀림으로 인한 저항은 무시하며 판과 보강재 모두 초기 변형은 없는 것으로 한다.

## 3. 판 및 보 좌굴에 대한 이론 전개

### 3-1 평판 좌굴 이론 전개

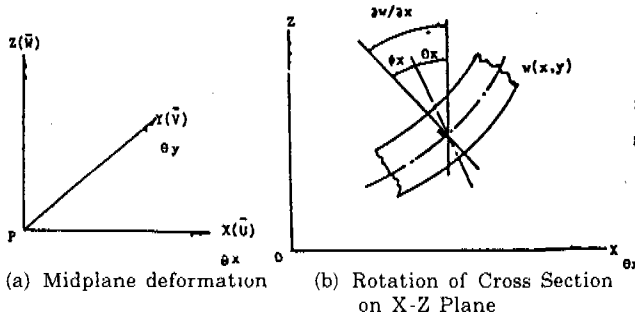


Fig. 2 Deformation

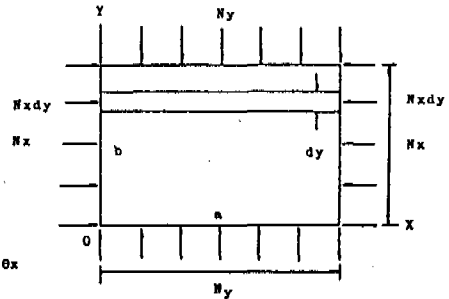


Fig. 3 Inplane loads

그림 2에서와 같이 일반적으로 임의점 P (x, y, z)에서의 변위성분을 u, v, w라 하면 변형률-변위관계식은 (2, 1)식으로, 응력-변

형률 관계식은 (2, 2)식으로 표현되며 여기서 [D]는 강성계수 행렬로 등방성 편판에 대한 것으로 식 (2, 3), (2, 4)과 같다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_x \\ x_y \\ x_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial\theta_x/\partial x \\ -\partial\theta_y/\partial y \\ -(\partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x) \\ \partial w/\partial x - \theta_x \\ \partial w/\partial y - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_b & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_x \\ x_y \\ x_{xy} \\ \phi_x \\ \phi_{yz} \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \quad (2.2)$$

$$[D_b] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & D(1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[D_s] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

여기서 D는 굽힘강성 값이고 S<sub>1</sub>과 S<sub>2</sub>는 전단강성 값으로 아래와 같다.

$$[D] = Et^3/12(1-\nu^2)$$

$$[S] = Et/2(1+\nu)\alpha$$

여기서  $\alpha$ 는 전단응력의 비로써 등방성 편판의 경우는 일반적으로  $\alpha = 5/6$ 을 사용한다.<sup>15)</sup> 그림 3에서 편판에 저장되는 변형 에너지를 U<sub>p</sub>라 할때

$$U_p = \left[ \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv \right] \quad (2.5)$$

V : volume of plate

그리고 편판의 포텐셜 에너지를 V<sub>p</sub>라 하면

$$V_p = - \frac{1}{2} \int_A \{G\}^T [S_0] \{G\} dA \quad (2.6)$$

$$\text{여기서 } \{G\} = \begin{Bmatrix} \partial\omega/\partial x \\ \partial\omega/\partial y \end{Bmatrix}, [S_0] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$$

그러므로 편판 전체의 포텐셜 에너지  $\Pi_p$ 는

$$\begin{aligned} \Pi_p &= U_p + V_p \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_A \{G\}^T [S_0] \{G\} dA \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 3.2 Beam 좌굴에 대한 기본 이론의 전개

그림 2에서 X축 방향의 변위를 U, 전단 변형을  $\phi_x$ 라 하면 Beam 전체의 포텐셜

Energy는 아래와 같다.

$$\Gamma_b = U_b + V_b \quad (2.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_s} \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV - \frac{1}{2} \int_x \{G\}^T \{S_0\} \{G\} dx$$

$V_s$  : volume of stiffener

### 3.3 Ritz method 적용을 위한 변위 함수의 유도

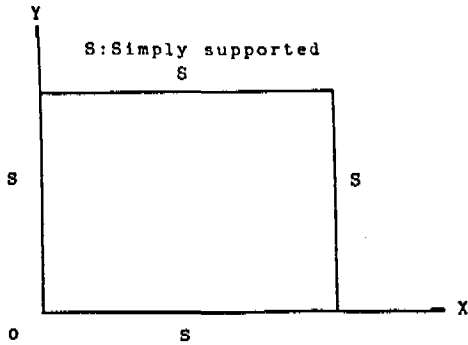


Fig. 4 Boundary Condition

#### 3-3-1. 평판좌굴의 정식화

본 논문에서는 mindlin평판 이론을 적용하여 중립면의 처짐변위  $w$ 와 회전변위  $\theta_x, \theta_y$ 에 대한 경계조건을 만족하는 함수를 독립적으로 선정하여 전단변형의 영향을 고려한 좌굴 해석을 하였다. 그림 4에서와 같이 처짐변위  $w$ 와 회전변위  $\theta_x, \theta_y$ 의 경계조건을 만족하는 변위 함수는 아래와 같이 가정할 수 있다.

$$w = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\theta_x = \theta_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.9)$$

$$\theta_y = \theta_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}$$

가정한 변위 함수의 식 (2.9)를 사용하여 평판의 변형률  $\{\epsilon\}$  포텐셜 에너지식 (2.6)의 행

렬  $\{G\}$ 를 나타내면 전단 변형률은

$$\{\epsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial w / \partial x - \theta_x \\ \partial w / \partial y - \theta_y \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} W_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} - \theta_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ W_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} - \theta_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix}$$

위 식을 행렬식 꼴로 나타내면 다음식을

얻는다.

$$\begin{bmatrix} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} & -\cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} & 0 \\ \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} & 0 & -\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \theta_{xmn} \\ \theta_{ymn} \end{Bmatrix}$$

(2.10)

급합 변형률은

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial\theta_x/\partial x \\ -\partial\theta_y/\partial y \\ -(\partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x) \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \theta_x mn \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \theta_y mn \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \\ (\theta_x mn \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} + \theta_y mn \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}) \end{Bmatrix} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

판 전체의 변형률은

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_b \\ \dots \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_b \\ \dots \\ B_s \end{Bmatrix} \{\delta\} = [B] \{G\} & \{G\} &= \begin{Bmatrix} \partial w/\partial x \\ \partial w/\partial y \end{Bmatrix} = \\
 & & & \begin{Bmatrix} Wmn \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ Wmn \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

변위 함수로 포텐셜 에너지식 (2.10)의  $\{G\}$ 를 나타내면

로 되고, 이것을 다시 정리하여 표시하면

$$\begin{aligned}
 \{G\} &= \begin{bmatrix} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} & 0 & 0 \\ \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Wmn \\ \theta_{xmn} \\ \theta_{ymn} \end{Bmatrix} \\
 &= [C] \{\delta\} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

식 (2.7)의 평판전체의 포텐셜 에너지  $\Pi_P$ 를 나타내면 아래와 같은 고유치 문제가 된다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_P &= U_P + V_P \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dA - \frac{1}{2} \int_A \{G\}^T [S_0] \{G\} dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dA - \frac{1}{2} \int_A \{G\}^T [S_0] \{G\} dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dA - \frac{1}{2} \int_A \{\delta\}^T [C]^T [S_0] [C] \{\delta\} dA \\
 &= \frac{1}{2} \{\delta\}^T \left( \int_A [B]^T [D] [B] dA - \int_A [C]^T [S_0] [C] dA \right) \{\delta\}
 \end{aligned}$$

중립평형을 취하면  $\partial \Pi_p / \partial \delta = 0$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \delta} = ( \int_A (B)^T (D) (B) dA - \int_A (C)^T (S_0) (C) dA ) \{ \delta \} = 0$$

$[K] = \int_A (B)^T (D) (B) dA$  : 강성행렬

$[K_G] = \int_A (C)^T (S_0) (C) dA$  : 기하학적 강성행렬

이라 두면

$$([K] - \lambda [K_G]) \{ \delta \} = 0 \quad (2.14)$$

$$[K] = \int_A (B)^T (D) (B) dA$$

$$= \int_A \begin{bmatrix} B_b \\ B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_b & \\ & D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_b \\ B_s \end{bmatrix} dA$$

$$= \int_A (B_b)^T (D_b) (B_b) dA + \int_A (B_s)^T (D_s) (B_s) dA$$

$$= [K_b] + [K_s] \quad (2.15)$$

여기서  $[K_b] = \int_A (B_b)^T (D_b) (B_b) dA$

$[K_s] = \int_A (B_s)^T (D_s) (B_s) dA$

$[K_G] = \int_A (C)^T (S_0) (C) dA \quad (2.15)'$

$$[K] - \lambda [K_G] = \begin{bmatrix} C_{11} - R & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

고유치 식 (2.14)로부터 임계하중값을 구하기 위하여는 행렬식  $| [K] - \lambda [K_G] | = 0$  을 풀면 된다.

$$| [K] - \lambda [K_G] | = 0$$

$$= (C_{11} - R) \{ C_{22} C_{33} - C_{23} C_{32} \} + C_{12} \{ C_{23} C_{31} - C_{21} C_{33} \} + C_{13} \{ C_{21} C_{32} - C_{22} C_{31} \} = 0$$

$$\text{그런데 } R = N_x \cdot \pi^2 \left\{ m^2 \left( \frac{b}{a} \right) + \frac{N_{yo}}{N_{xo}} n^2 \left( \frac{a}{b} \right) \right\}$$

$$N_x = R / \pi^2 \left\{ m^2 \left( \frac{b}{a} \right) + \frac{N_{yo}}{N_{xo}} n^2 \left( \frac{a}{b} \right) \right\} \quad (2.17)$$

여기서  $N_{yo}/N_{xo}$ 는 응력비이며 또한 임계 하중 (Critical load) 은  $\sigma_{cr} = N_x / t_p$  이므로

$$\sigma_{cr} = \frac{K \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t_p}{b} \right)^2 = K \sigma_0, \left( \sigma_0 = \frac{\pi^2 D}{b^2 t_p} \right) \quad (2.18)$$

$$\text{그러므로 } K = \sigma_{cr} / \sigma_0 \quad (2.19)$$

위 식의  $\{ C_{22} C_{33} - C_{23} C_{32} \} = \text{CONS 1}$

$C_{12} \{ C_{23} C_{31} - C_{21} C_{33} \} + C_{13} \{ C_{21} C_{32} -$

$C_{22} C_{31} \} = \text{CONS 2}$

$$R = C_{11} + \frac{\text{CONS 2}}{\text{CONS 1}}$$

좌굴 하중 계수를 K라 두면

## 3-3-2. Beam 요소의 좌굴 정식화

앞에서 가정한 변위함수식 (2, 9) 에서 보강재의 y축 방향의 좌표를  $y_i$ 라 하면

$$w = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} S_y \quad \text{여기서} \quad S_y = \sin \frac{n\pi y_i}{b} : \text{상수}$$

$$\theta_x = \theta_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} S_y \quad (2.19)'$$

그러므로

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_b \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_x \\ \Phi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial\theta_x / \partial x \\ \partial w / \partial x - \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_b \\ B_s \end{bmatrix} \{\delta\}$$

$$= [B] \{\delta\} \quad (2.20)$$

행렬  $\{G\}$  를 식 (2, 19)' 으로 나타내면

$$\{G\} = \{\partial w / \partial x\} = \left[ \frac{m\pi}{a} S_y \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \{W_{mn}\}$$

$$= [C] \{\delta\} \quad (2.21)$$

평판의 경우와 같이  $[K] = [K_b] + [K_s]$  에 서  $[D]$  는  $EI, dA$  는  $dx$  로 놓으면

$$[K_b] = \int_0^A EI [B_b]^T [B_b] dx$$

$$= EI_x \int_0^A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^2 \pi^2}{a^2} S_y^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^2 \pi^2}{2a} S_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[K_s] = \int_0^a GA [B_s]^T [B_s] dx$$

$$= GA_x \int_0^a \begin{bmatrix} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} S_y^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{a} & \frac{m\pi}{a} S_y^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{a} & 0 \\ -\frac{m\pi}{a} S_y^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{a} & S_y^2 \cos^2 \frac{m\pi x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$



$$= GA_x \begin{bmatrix} \frac{m^2 \pi^2}{2a} S_y^2 & \frac{m\pi}{-2} S_y^2 & 0 \\ -\frac{m\pi}{2} S_y^2 & \frac{a}{2} S_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

그러므로  $[K] = [K_b] + [K_s]$

$$= S_y^2 \begin{bmatrix} GA_x \frac{m^2 \pi^2}{2a} & -GA_x \frac{m\pi}{2} & 0 \\ -GA_x \frac{m\pi}{2} & GA_x \frac{a}{2} + EI_x \frac{m^2 \pi^2}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

보강재의 x축 방향의 좌표를  $x_i$ 라 하면

변위함수식  $w = W_{mn} S_x \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$

$$\theta_y = \theta_{ym} S_x \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \text{여기서} \quad S_x = \sin \frac{m\pi x_i}{a}$$

$$[K] = S_x^2 \begin{bmatrix} GA_y \frac{n^2 \pi^2}{2b} & 0 & -GA_y \frac{n\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ GA_y \frac{n\pi}{2} & 0 & GA_y \frac{b}{2} + EI_y \frac{n^2 \pi^2}{2b} \end{bmatrix}$$

$$[K_G]_x = \int_0^a [C]^T [S_0] [C] dx \\ = \sigma_x A_x \frac{n^2 \pi^2}{2a} S_y^2$$

마찬가지로

$$[K_G]_y = \int_0^a [C]^T [S_0] [C] dy \\ = \sigma_y A_y \frac{n^2 \pi^2}{2a} S_x^2$$

따라서

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \sigma_x \left\{ A_x \frac{m^2 \pi^2}{2a} S_y^2 + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} A_y \frac{n^2 \pi^2}{2b} S_x^2 \right\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

3-3-3. 보강판의 좌굴 정식화

(2, 26)을 가하여 보강판의 강성행렬과 기하학적 강성행렬 [K]와 [K<sub>G</sub>]를 구하면

식(2, 15), (2, 15')에 식(2, 24), (2, 25),

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{4} S_1 m^2 \left(\frac{b}{a}\right) + S_2 n^2 \left(\frac{a}{b}\right) & & \\ + G \left\{ A_x \frac{m^2 \pi^2}{2a} S_y^2 + A_y \frac{n^2 \pi^2}{2b} S_x^2 \right\} & -\frac{\pi}{4} S_1 mb - GA_x \frac{m\pi}{2} S_y & -\frac{\pi}{4} S_2 na - GA_y \frac{n\pi}{2} S_x \\ & & \\ & \frac{\pi^2}{4} \left\{ m^2 D_{11} \left(\frac{b}{a}\right) + D_{33} n^2 \left(\frac{a}{b}\right) \right\} & \\ -\frac{\pi}{4} S_1 mb - GA_x \frac{m\pi}{2} S_y & +\frac{1}{4} S_1 ab + \left\{ GA_x \frac{a}{2} + EI_x \frac{m^2 \pi^2}{2a} \right\} S_y^2 & \frac{\pi^2}{4} mn \{ D_{12} + D_{13} \} \\ & & \\ -\frac{\pi}{4} S_2 na - GA_y \frac{n\pi}{2} S_x & \frac{\pi^2}{4} mn \{ D_{21} + D_{33} \} & \frac{\pi^2}{4} \left\{ D_{33} m^2 \left(\frac{b}{a}\right) + D_{22} n^2 \left(\frac{a}{b}\right) \right\} \\ & & +\frac{1}{4} S_2 ab + S_x^2 \left\{ GA_y \frac{b}{a} + EI_y \frac{n^2 \pi^2}{2b} \right\} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{4} \{ N_{x0} m^2 \left(\frac{b}{a}\right) + N_{y0} n^2 \left(\frac{a}{b}\right) \} & 0 & 0 \\ + \sigma_x \left\{ A_x \frac{m^2 \pi^2}{2a} S_y^2 + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} A_y \frac{n^2 \pi^2}{2b} S_x^2 \right\} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

고유치 방정식  $|(K) - \lambda(K_G)|$  의 해를 구하면 된다.  
보강재의 단면특성은 그림 5와 같다.

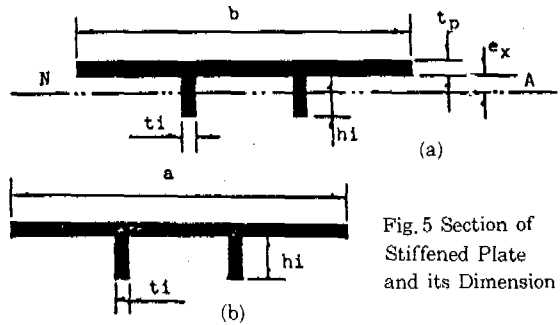
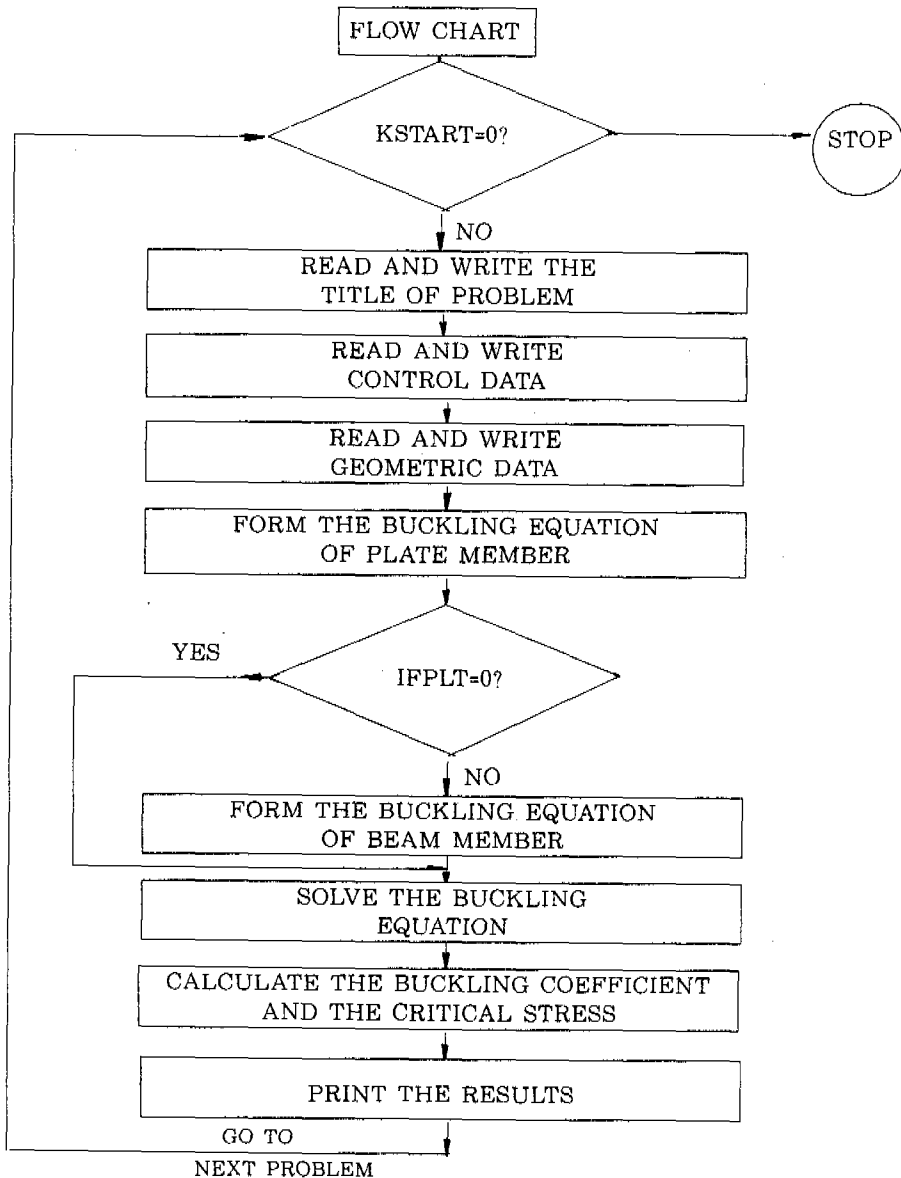


Fig. 5 Section of Stiffened Plate and its Dimension

#### 4. 전산프로그램과 해석

##### 4-1. Flow chart



4-2. 해석에

4-2-1. 평판의 좌굴해석 정도비교

폭 800mm,  $a/b=0.2-4.0$  그리고  $t/b=0.001-0.2$ 까지 변하는 평판이 일축 및 이축 압축 하중에서 좌굴해석을 수행하여 좌굴계수의 최초치를 측정하였다. 본 연구의 정도를 Table 1에서 알 수 있는 바와같이 Timoshenko의 박판 이론<sup>1)</sup>와 다른 연구자들<sup>8)9)10)</sup>과도 잘 일치함을 보여준다.

1) 일축 압축하중 조건

일축 압축하중을 받는 경우 판두께의 증가에 따라 전단변형이 좌굴에 미치는 영향을 조사하였다. Table 2는  $a/b=1.0$ ,  $t/b=0.001-0.2$ 범위내에서 변할 때 좌굴계수 변화를 나타내며 G. V. Rao<sup>7)</sup>, Timoshenko<sup>1)</sup> S. Srinivas<sup>13)</sup> 등의 해와

근사값을 나타낸다.  $t/b$ 가 증가함에 따라 Timoshenko의 고전적 해법에 따른 설계는 좌굴하중 계수를 필요이상으로 큰 값을 적용하는 결과가 된다. 또한  $t/b=0.05$ 보다 적은 경우는 전단 변형의 영향은 거의 없음을 알 수 있다.

Table 1 Buckling factors Simply supported square plate

Author	Elements	uniaxial load	biaxial load	remark
K. K. Kapur & J. Hartz	16	3,770	-	
	64	3,993	-	
D. J. Allman	16	4,031	2,106	
	64	4,006	2,003	
P. D. C. Yang	4	3,2113	2,0192	
	16	4,0244	-	
Present method	-	4,000	1,9926	b/t=800
	-	3,9965	1,9982	b/t= 80
Timoshenko	-	4,000	2,000	

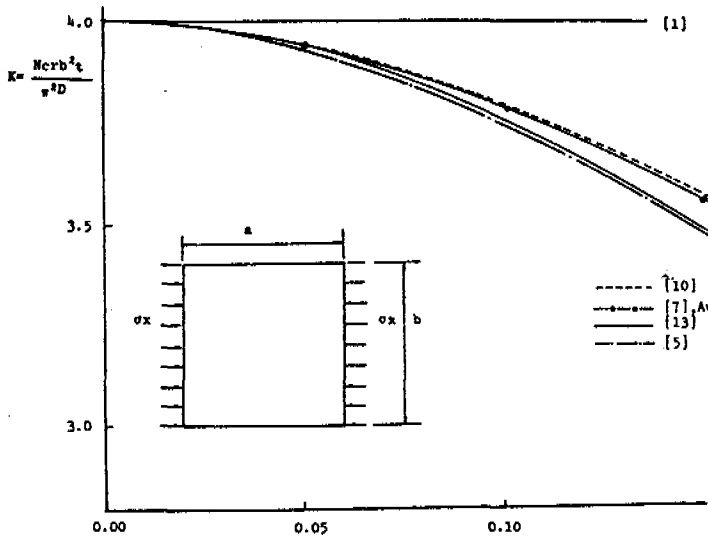


Fig. 7 Buckling Factors for considering shear effect simply supported Square plates of various thickness span ratio ( $a/b=1.0$ )

Table 2 Buckling of Simply Supported Square plates under Uniaxial.

Reference Author	(13) Exact 3-D	(5) F.S	(7) Author F.E.M.	(10) P.D.C.Y.	(1) T.P.
t/b	k				
0.001	4.000	3.999	4.000	4.000	4.000
0.00125	-	-	4.000	-	4.000
0.050	3.000	3.929	3.944	3.944	4.000
0.100	3.741	3.737	3.787	3.787	4.000
0.150	-	-	3.550	-	4.000
0.200	3.150	3.126	3.236	3.263	4.000

Table 3. Lowest values of buckling factor

No	t/b	a/b					
		0.9	1.0	1.9	2.0	2.9	3.0
1	.00125		4.000		4.000		4.000
2	.00625		3.9991	1	3.9991		3.9991
3	.0250		3.9860		3.9860		3.9860
4	.0500		3.9440		3.9440		3.9440
5	0.750		3.8770		3.8770		
6	.1000		3.7865	3.7865		3.7837	
7	.1250		3.6761	3.6697		3.6699	
8	.1500	3.5423		3.5374		3.5370	

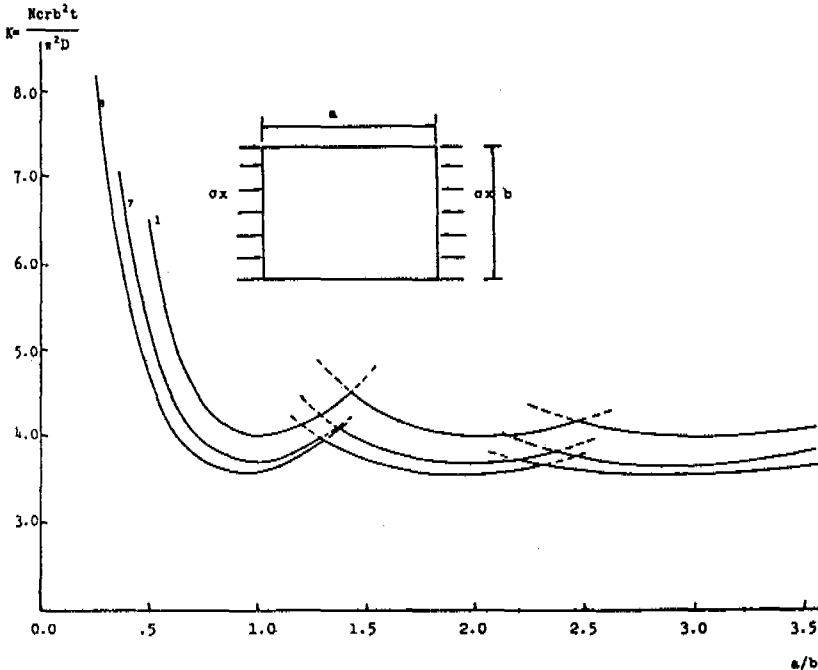


Fig. 8 Lowest values of buckling factor vs aspect ratio.

Table 3에서의 얇은 판의 해에서 좌굴계수의 최소치는 aspect ratio의 증가에 관계없이 a/b값이 정수치 일 때 발생되었다 그러나 t/b의 증가에 따라 aspect ratio가 증가할 수록 정수치보다 작은 값에서 최소의 좌굴하중계수가 나타남을 알 수 있다.

2) 이축 압축하중 조건

사변 단순지지 평판이 2축 압축하중을 받는 경우 t/b가 0.01과 0.1에 대해서  $\sigma_y/\sigma_x$ 가  $-1.0 \leq \sigma_y/\sigma_x \leq 1.0$ 범위이고

a/b가 0.2에서 5.0까지 변화할때 좌굴하중계수를 구하였다. 그림 9는 설계자료<sup>11)</sup>와 잘 일치하며 얇은 판의 경우 a/b=1.0인때, 일축 압축하중의 좌굴계수가 4.0임에 비해 2축 압축하중의 경우는 2.0이 됨을 알 수 있다.

또 t/b=0.01인 얇은 판에서 점차 두꺼운 판으로 됨에 따라 전단 변형의 영향이 증가됨을 알 수 있다. 또한 일축 압축하중을 받는 경우보다 같은 크기의 인장, 압축하중을 상호 수직으로

받을 때가 더큰(얇은 판의 약2배) 좌굴 계수를 나타낸다.

4-2-2. 보강편판의 좌굴해석 정도비교

길이와 폭이 각각 1,200mm이고 판과 보강재의 두께가 모두 12mm인 보강편판이 면내 하중을 받을 때 좌굴거동을 아래와 같은 3가지 model의 경우를 조사하였다.

- 가) 하중방향의 보강재를 등간격으로 가질때 LS-1, LS-2, LS-3. :여기 숫자는 보강재의 수
- 나) 하중방향에 수직한 보강재만을 가질 때 TS-1, TS-2, TS-3.
- 다) 상호 수직한 방향으로 보강재를 가질 때 CS-1, CS-2, CS-3.

이 경우는 정도확인을 위하여 Timoshenko 와 Troitsky의 해석치<sup>1)3)</sup>와 비교하였다. Table 4에서와 같이 보강재의 높이를 변화

시켜가며 응력비( $\sigma_{cr}/\sigma_{yp}$ )를 조사한 결과 대단히 만족한 정도를 얻었다.

1) 보강 효과의 비교

동일한 경계조건과 하중조건에서 하중 방향으로 보강된 LS-1의 경우와 수직 한 방향의 보강판인 TS-1의 경우 보강재의 면적비가 0.02까지는 응력비에 차이가 별로 없으나 그이상 증가되면 현저한 차이가 발생한다. 0.06에 이르러서는 LS-1의 경우가 TS-1의 거의 2배에 도달하는 보강효과가 나타났다. 또한 TS-1의 경우는 하중이 작을 때는 보강판 전체좌굴이 발생하면 면적비가 증가하여 어떤 값에 도달하면 보강재는 면적비의 증가에 관계없이 응력비의 증가에 무관하게 Panel Braker의 역할을 담당하며 국부 좌굴을 일으켜 파괴에 이르게 됨을 알 수 있다.

Table 4. Stress ratio of equidistant longitudinally stiffened plate according to the various area ratio when  $b/t=100$ ,  $a/b=1.0$  simply Supported boundary Comdition.

N. St.		$\delta$					
		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
LS-1	T	0.326	0.348	0.445	0.634	0.942	1.393
	P	0.316	0.348	0.445	0.633	0.940	1.387
LS-2	T	0.316	0.364	0.504	0.776	1.213	1.849
	P	0.315	0.363	0.504	0.774	1.210	1.839
LS-3	T	0.315	0.378	0.560	0.908	1.463	2.261
	P	0.315	0.378	0.559	0.906	1.457	2.246

2) 상호 수직 보강편판

보강판의  $a/b=1.0$ 인 CS-1, CS-2, CS-3를 대상으로 일축 압축하중에서의 좌굴거동을 조사하였다. CS-1.인 경우는 보강판 전체좌굴 보다는 하중의 수직방향의 보강재를 Panel Braker로 하는 국부 좌굴이 먼저 일어나서 파괴에 이른다. LS-3.의 경우와 비교하여

보면 동일한 하중조건 하에서 보강재의 치수를 거의 반정도는 줄일 수 있는 효과가 있음을 알 수 있다.

선박에서 Shell Plate에 Side Stringer 또는 Horizontal Girder 및 Special Frame을 설치함으로써 늑골의 치수를 감소시킬 수 있을 것이다.

그러나 CS-2, CS-3의 경우는  $a/b \leq$

1.0에서는 대단히 Rigidity가 커서 좌굴을 일으키기 전에 소성역으로 들어가 파괴를 일으킴을 알 수 있다.  $a/b > 1.0$ 인 보강판에서는 탄성좌굴이 일어나나 여기서는 다루지 않았다.

## 5. 결 언

등방성 보강평판의 좌굴해석을 Mindlin 평판이론에 기초하고 Ritz method를 도입한 준해석적 방법으로 수행함으로써 아래와 같은 결론을 얻었다.

- 1) 비교적 두꺼운 평판의 좌굴 해석에 의하면  $t/b = 0.05$  이하 일때는 좌굴하중에 대한 전단변형은 무시할 수 있다.
- 2) 보강재는 등간격으로 하중방향에 평행하게 배치하는 것이 직각방향 배치보다 유리하며  $a/b = 1.0$ 이하에서는 국부 좌굴없이 판전체 좌굴상태에서 탄성한계에 도달하여 파괴됨을 알 수 있다.
- 3) 하중방향에 수직한 보강재만을 갖는 경우 보강재의 면적비가 증가함에 따라 판전체 좌굴에서 국부좌굴 형태로 변하여 파괴에 도달한다. 이때 보강재는 좌굴계수 증가에는 영향을 미치지 못하고 Panel Braker의 역할을 할 뿐이다.
- 4) 본논문의 해석방법이 다른 평판 좌굴해석 방법의 해와 잘일치하며 Program의 작성, 정식화 및 계산시간 드이에서 유리한 방법으로 평가되며 본논문의 방법을 더 확장한다면 Shell 및 비선형 문제의 해석에도 효과적으로 적용할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

1. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability 2nd ed. McGraw-Hill Ltd. 1969.
2. R. Szilard, Theory and Analysis of Plates Prentice-Hall Inc.

- 1974.
3. N. S. Troitsky, Stiffened Plates Bending, Stability and Vibration Elsevier Scientific Publishing Co. 1976.
4. E. Hinton, A Thick Finite Strip Solutiuon for Static, Free Vibration and Stability Problem I. J. N. M. E. Vol. 10, 1976.
5. E. Hinton, buckling of Initially Stressed Mindlin Plates Using a Finite Strip Method Computers and Structures Vol. 8, 1978.
6. Klaus-Jurgen Bathe and Edward. I. Wilson, Numercial Method in Finite Element Analysis Prentice-Hall Inc. 1976.
7. G. V. Rao, J. Venkataraman and K. Kanaka Raju, Stability of Moderatly thick Rectangular Plates Using a high Precision Triangular element Computers and Structures Vol. 15, 1975.
8. Kanwer K. Kapur and B. J. Hartz, Stablity of Plates Using The Finite Element Method ASCE. Engineering Mechanics Div. 1966.
9. D. J. Allman, Calculation of the Elastic Buckling Loads of Thin Flat Reinforced-Plates using Triangular Finite Element I. J. N. M. Vol. 9, 1975.
10. 양박달치, 보강판의 좌굴해석 공학석사 학위논문, 서울대학교, 1981.
11. 이재신, 선체구조역학 초판, 재단법인 한국해사문제 연구소.
12. S. Srinivas and A. K. Rao, Buckling of thick rectagular Plates J. AIAA 7(8), 1954-1646 (1969).

13. Ir. H. Geertsema, Buckling analysis of Ship Plate-Structures Report No 207s, Net-Herland Ship Research Center TNO, Delpt, The Netherlands
14. E. Hinton, A. Razzaque, O. C. Zienkiewicz, and J. D. Davies, A Simple Finite element Solution for Plates of Homogeneous, Sandwich and cellular construction, Proc. Inst. Civ. Eng, 59, Part 2, 43-65, 1975.
16. 이용재, 압축을 받는 판 및 보강판의 유한대판법에 의한 기하학적 비선형 해석 공학박사 학위논문, 서울대학교 1978.