

인공 압축성 방법에 의한 비압축성 자유표면 점성유동의 수치해석

윤범상 · 정노택
조선 및 해양공학과

<요 약>

자유표면을 가진 층류유동의 해석을 위하여 Artificial Compressibility Method (이하 ACM)을 도입하여 계산을 수행하였다. 수치계산은 양해법을 사용하였으며 Backward Facing Step Flow 와 Driven Cavity 문제에 대한 계산예를 통하여 기법의 타당성을 검증하였다. 본 계산기법을 자유표면 유동문제로 확장하여 적용한 결과, 자유표면의 변위, 유동장, 압력분포에 미치는 자유표면의 영향등을 대체적으로 잘 파악할 수 있었다.

A Numerical Simulation of Incompressible Free Surface Laminar Flows by the Artificial Compressibility Navier-Stokes Solver

Bum-Sang, Yoon · No-Teak, Jeong
Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering

<Abstract>

In the present paper, Artificial Compressibility Method(ACM) is adopted for numerical analysis of laminar flows with free surface.

An explicit algorithm is employed in numerical computation and its validity is checked through some example calculations for the well known Backward Facing Step Flow and Driven Cavity problem.

Furthermore, the present method is applied to the free surface laminar flow problem, the main subject of the present study, in which flow pattern analysis is carried out for a two dimensional fluid domain with various bump shapes.

1. 서 론

컴퓨터의 발전과 더불어 전산유체역학(CFD: Computational Fluid Dynamics)에 대한 관심이 점점 높아지고 있다. 넓은 의미의 CFD에는 이상유체유동에 관한 수치연구도 포함되나 통상 좁은 의미의 CFD에는 점성유동이 그 대상이 된다. 나아가 점성유동에 대한 수치해법도 물체에 가까운 부분에 형성되는 경계층 내부는 점성유동으로 그 바깥 부분은 이상유동으로 간주하여 경계면에서 접합하는 일종의 Hybrid법[1], vorticity 와 stream function을 도입하여 문제를 재구성하여 풀어 나가는 고전적 간접 방법[2], 그리고 유체영역 전체에 대해서 기본 미지수인 유속과 압력을 직접 풀어가는 방법으로 대별되는데 최근의 CFD는 마지막 방법에 그 초점이 맞추어져 있다.

본 논문에서는 비압축성 유체유동에 대한 기본 미지수를 직접 푸는 한 방법으로서 Chorin이 제안한 ACM[3]을 적용하여 중력장 내에서의 자유표면 점성유동을 수치계산 하였다.

ACM의 특징은 수치계산시 MAC법[4], 또는 기타 Semi-Implicit법[5,6]등과 달리 음해법의 도입이 가능해 계산의 효율성이 대폭 향상되는 장점이 있다. 그럼에도 불구하고 본고에서는 양해법으로 순차계산을 실시하여 이의 타당성을 검증하였다.

한편 자유표면을 가진 점성유동의 문제는 선박 유체공학분야의 오래된 핵심과제로서(예를 들어 저항추정의 문제만 보더라도) 중력 즉, Froude수에 의존하는 조파저항과 점성력 즉, Reynold 수에 의존하는 점성저항을 동시에 추정 할 수 없는 것으로 알려져 왔다.[7]

본고는 이의 동시적 취급을 목적으로 한 연구의 기초작업으로서 우선 수저면(channel bottom)에 여러형상의 물체가 놓여 있다고 가정하고 Reynold수(Re)와 Froude수(Fn)를 변화시켜 가면서 유체유동장, 압력분포, 자유수면 변위를 계산해 봄으로서 계산기법의 유효성과 아울러 자유표면의 존재가 유동특성에 미치는 영향등을 분석하였다. 단 모든 계산은 2차원 층류유동에 국한하였으며, 계산결과등에 대한 고찰을 통하여 몇가지 유용한 결과가 얻었으므로 이를 이하에 보고하고자 한다.

2. 수학 정식화

Fig.1 과 같은 좌표계를 갖는 층류 유동장에 대해 비압축성 유동을 가정하면 무차원화한 지배 방정식은 다음 식들로 나타난다.

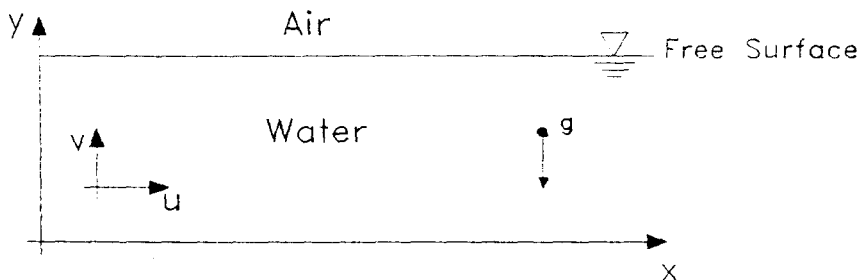


Fig.1 좌 표 계

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Fn^2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

여기서

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu} \quad (4)$$

$$Fn = \frac{U}{\sqrt{g \cdot L}} \quad (5)$$

이고 U, L, g, ν 는 각각 유체의 대표속도(입사속도), 특성장(물의깊이), 중력가속도, 그리고 동점성 계수를 나타낸다.

위의 지배 방정식의 해가 존재 또는 의미를 갖기 위해서는 문제에 따라 적당한 경계조건을 필요로 하며 이는 나중에 문제별로 기술하고자 한다.

연속방정식 (1)에는 압력의 시간 의존항이 없으므로 인해 미지수인 u, v, p 를 동시에 시간 영역에서 구해나가지 못하는 사실은 잘 알려져 있다. 따라서 Chorin[3]이 제안한 인공 압축성을 연속방정식에 고려하는 소위 A.C.M. 기법을 도입하였다. 즉 식(1) 대신에 다음식을 사용한다.

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

여기서 β : 인공 압축성 계수

비압축성 유체에 있어서의 압력파의 전파속도는 이론적으로 무한대이나 윗식과 같이 인공 압축성항을 고려함으로 인해 압력파 전파속도를 유한하게 함으로써 해의 안정성을 도모하는 개념으로 볼 수 있다.

그러나 압력파의 전파속도가 너무 크면 경계층이 형성 안되고, 너무 작으면 정상상태에 도달치 못하는 등의 이유로 적절한 β 의 선택은 이 방법의 성패를 좌우하는 열쇠가 된다.[8] 수치계산시 정상 상태에 도달하면 가상 압축성항은 자동적으로 영(zero)이 되어 기존의 비압축성 연속 방정식으로 귀결되며 따라서 정상상태에로의 수렴이 곧, 비압축성 유동으로의 수렴을 의미하는 것으로서 이는 Kwak[9]이 잘 증명한 바 있다.

한편 식(3)의 중력항을 효과적으로 처리하기 위하여 다음과 같은 관계식을 도입한다.[10]

$$\phi = p + \frac{v}{Fn^2} \quad (7)$$

여기서 ϕ 는 유체정압을 제외한 유체의 압력을 나타낸다. 결국 풀어야 할 최종적인 지배방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

3. 수치 계산법

3-1. 시간 차분

식(8)~(10)을 수치적으로 풀기 위하여 시간차분은 전진차분 (forward time differencing) 으로 수행하였다. 즉,

$$Q^{n+1} = Q^n + F(u^n, v^n, p^n) \cdot \Delta t \quad (11)$$

여기서

$Q = [\phi, u, v]^T$ 이고, F 는 미지수에 대한 비정상항을 제외한 나머지 공간에 대한 항으로된 함수를 의미한다. 또 윗첨자 $n+1$ 와 n 은 각각 시각 t^{n+1} 과 t^n 에서의 것들임을 나타낸다.

3-2. 공간 차분

공간차분으로서는 중앙차분(central differencing)을 주로 사용했으나, 운동 방정식의 이류항에 대해서는 계산의 안정성을 도모하기 위하여 1차 상류차분(1st order upwind differencing)을 사용하였다.

4. 계산 및 고찰

계산 기법의 유효성을 검증하기 위하여 비교적 자료가 풍부한 예제인 Backward Facing Step유동과 Driven Cavity 유동을 예로 들었고, 그 후 본 연구의 중심과제인 자유

표면 유동문제에 이를 적용하였다.

4-1. Backward Facing Step Flow

계산에 사용한 유체영역의 형상을 Fig.2에 나타내었다.

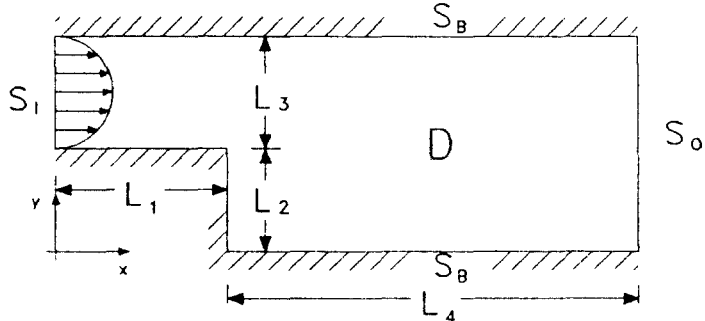


Fig.2 Backward Facing Step Flow

L1, L2, L3, L4는 각각 3, 1, 1, 27 units로 했으며 이는 기존의 비교 계산자료[11]를 기준으로 하였다.

가) 경계조건

중력이 배제된 본 문제의 계산에서 사용한 경계조건은 다음과 같다.

$$u = u(y) : \text{given}, v = 0, \phi = 1 \quad \text{on } S_1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_0 \quad (13)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \quad (14)$$

여기서, n은 유체영역의 경계면에서 수직 바깥방향을 나타낸다.

Outflow Boundary(S₀)에서의 조건에는 식(13) 대신에 유체영역내에서 완벽한 질량및 운동량 보존을 만족시키기 위해 외삽법 또는 비례상수를 도입해 조절하는 방법등도 있으나, 정성적 또는 정량적인 유체유동해석에 거의 영향이 없는 것으로 확인되어 이를 그대로 사용하는 것으로 하였다.

나) 수렴 및 비압축성 이력

x,y 방향 격자수는 각각 121개, 21개 그리고 $\beta = 1.2$, $Re = 300$, 시간간격 $\Delta t = 0.01$ 초로 수행한 계산에 대하여, 예로서 Fig.3에 정상 상태에의 도달과정을 보인다.

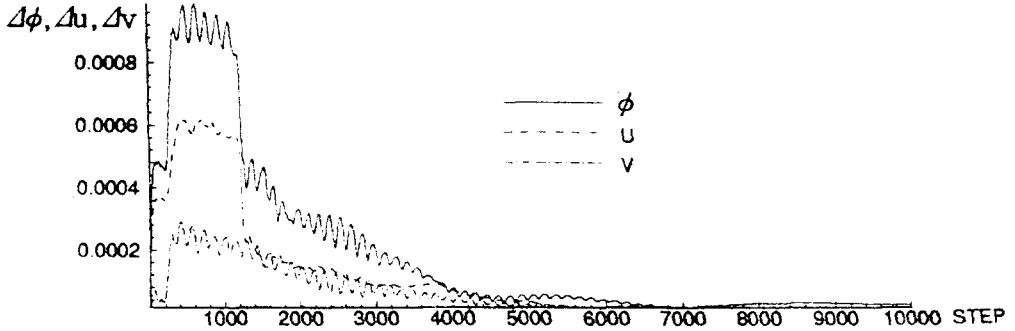


Fig.3 계산의 수렴 및 비압축성 이력(Re = 300)

여기서, 종축은 유체영역에서 압력 및 유속의 평균 변화량을 나타내며, 이들이 영(zero)가 되면 정상상태로, 동시에 비압축성 유동상태로의 도달을 의미한다.

이 그림에서 보는 바와 같이 수렴도는 매우 양호하여 약 10,000회 반복계산으로 만족할 만한 결과가 얻어지는 것을 예측할 수 있다.

다) 유동장의 특성

Fig.4는 계산결과로 얻어진 전형적인 유동장 및 압력분포등을 각각 나타낸다. Fig.5는 Stream Line과 유동장을 Reynolds Number(100부터 1000)에 따라 펼쳐놓았다.

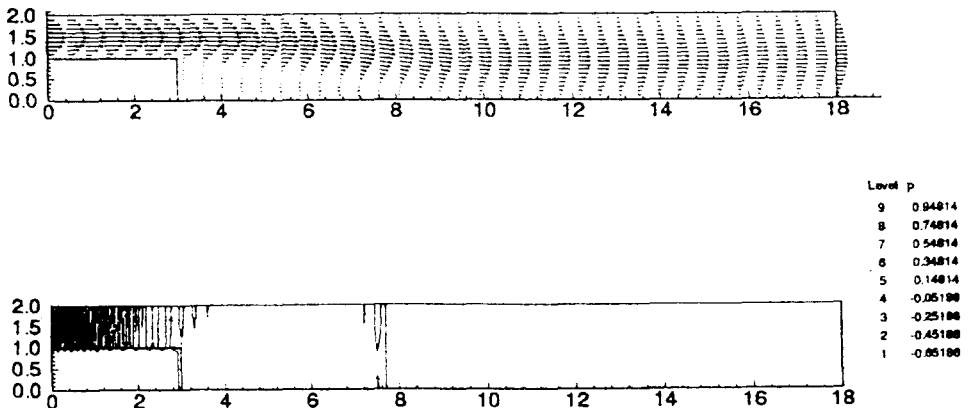


Fig.4 전형적인 유동장 및 압력장에 대한 계산결과 (Re = 300)

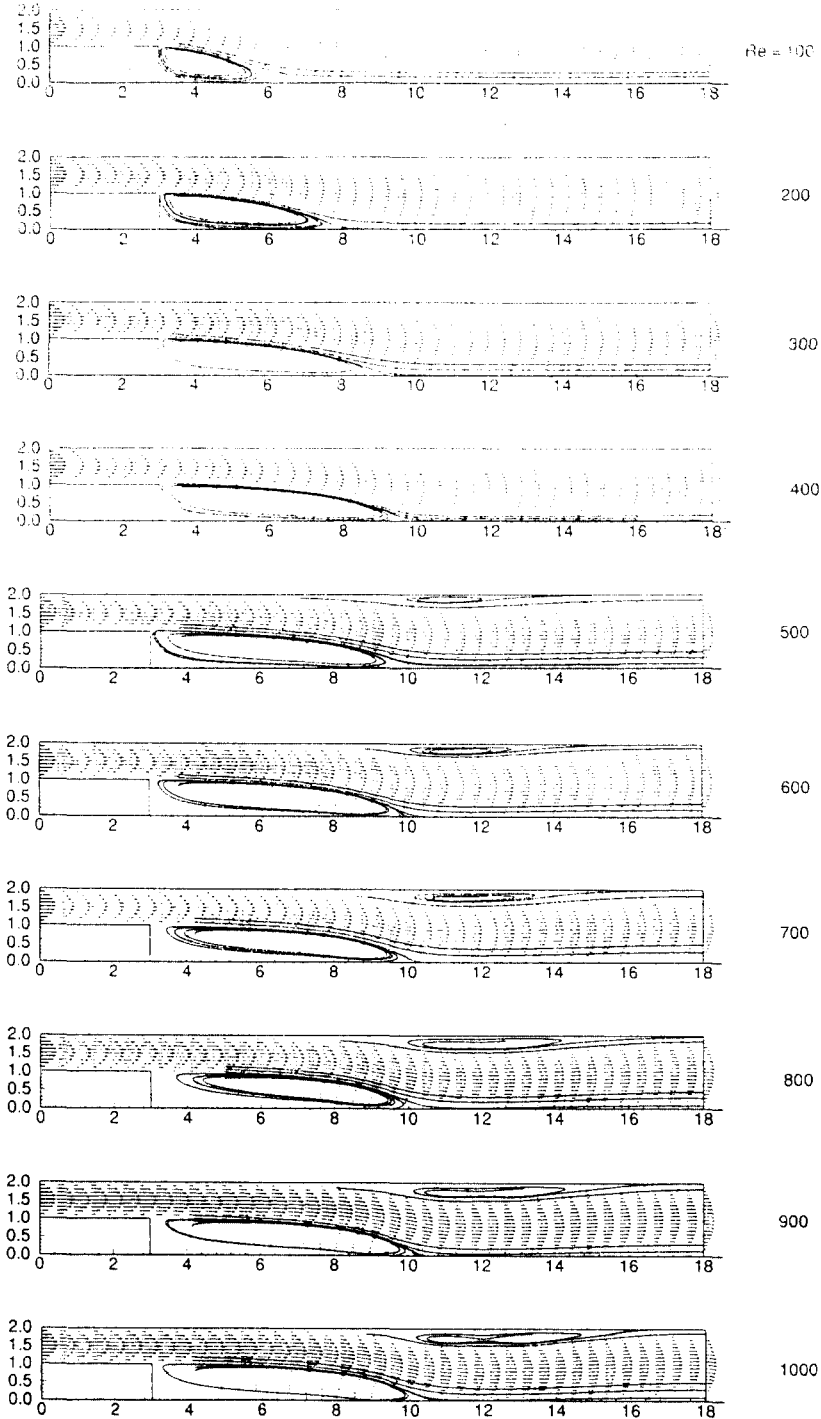


Fig.5 Reynolds Number의 증가에 따른 Stream Line의 변화

Fig.4 의 step후방 와류영역의 흐름방향 길이, 즉 reattachment length L 은 Re 에 따라 변화하는 값으로서 계산결과의 비교를 위해 빈번히 사용된다. 기존의 계산결과[11]와 본 계산의 결과를 Fig.6에 비교한다.

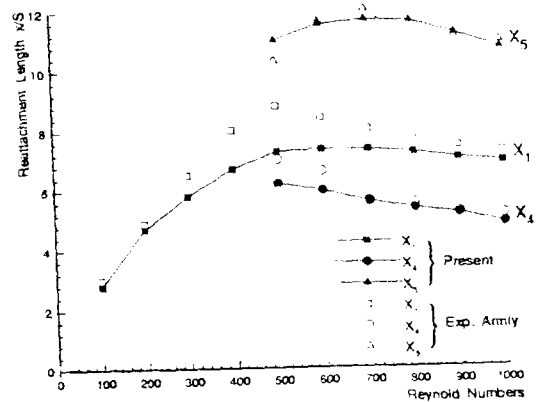
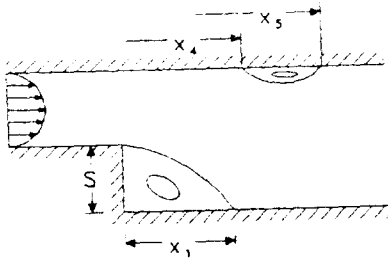


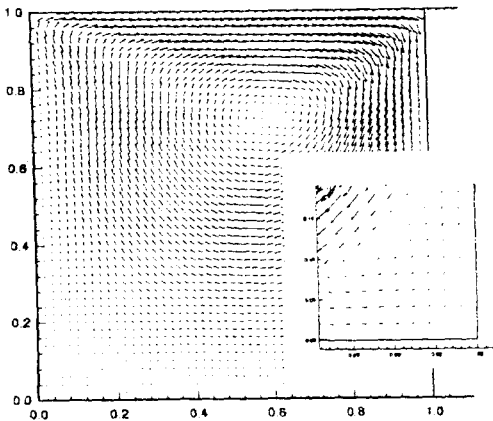
Fig.6 Reattachment Length 의 비교

본 계산 기법에 의한 계산결과가 기존의 실험 결과와 잘 일치하고 있어 기법의 유효성이 확보되었다고 판단 할 수 있었다.

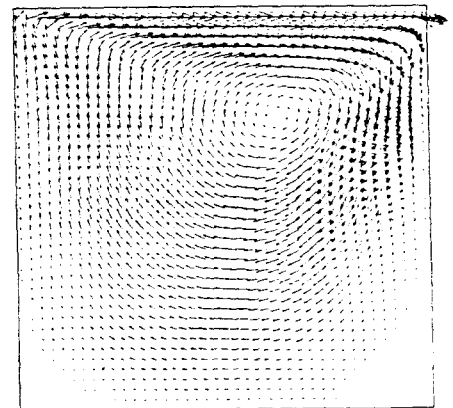
4-2 Driven Cavity Flow

두번째 계산으로 $Re = 100$ 에 대한 Driven Cavity 유동을 수치계산 하였다. 계산 결과의 속도 벡터량을 기존의 자료[12]와 Fig.7에 비교하였다.

계산에 사용된 격자의 갯수는 가로, 세로 각각 61개, 61개로 하였다.



(a) 본 계산



(b) P.M.Gerhart 등 [12]

Fig.7 Driven Cavity Flow에 대한 계산결과 비교($Re = 100$)

비교결과, 본 계산은 1차 주와류 그리고 모서리 부분에 생성되는 2차와류등을 잘 표현할 수 있음을 알 수 있었다.

4-3 자유 표면 유동

본고 에서 사용한 계산에는 Fig.8에 보이는 바와 같이 물바닥에 놓인 bump의 존재가 자유표면유동에 미치는 영향 파악이라는 점에 초점을 맞추는 것으로 하였다.

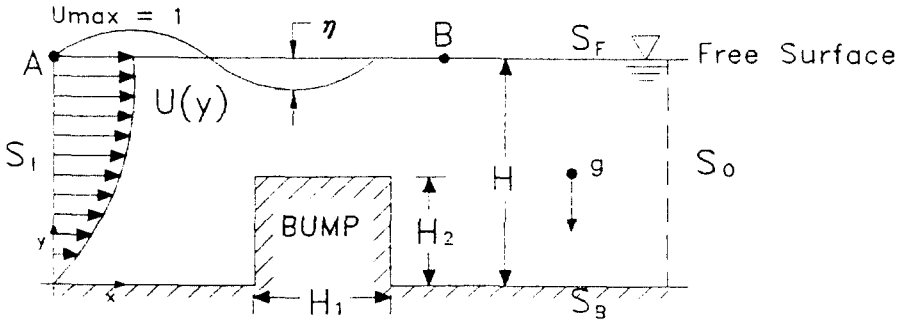


Fig.8 자유 표면 유동의 계산 영역

가) 경계 조건

Outflow boundary(S_0)와 rigid wall boundary(S_B)에서의 조건은 앞의 Backward Facing Step Flow의 경우와 같으므로 이를 생략한다. Inflow boundary(S_1)에서의 유속경계조건도 앞의 문제와 같으나, 계산에서 사용한 ϕ 는 유체정압을 제외한 동압만을 의미함으로 이를 영(zero)으로 하였다.

한편 자유표면(S_F)에서의 경계조건은 매우 중요한 것으로서 u, v 에 대해서는 No-gradient 조건을 적용하였으나 ϕ 에 대한 조건은 동역학적 경계조건을 이용하는 것으로 하였다. 즉 자유표면에서 유체 압력은 영(zero)이고, 자유표면 변위가 작다고 가정하면, $y = 1 + \eta$ 이나 $\eta \approx 0$ 로 근사하면 다음식을 얻는다.

$$\phi = \frac{1}{Fn^2} \quad \text{on } S_F \quad (15)$$

또, 자유표면변위 η 를 구하기 위하여 정상상태에 대한 무차원화된 Bernoulli의 정리를 이용하면 :

$$\frac{1}{2} u_A^2 + p_A + \frac{y_A}{Fn^2} = \frac{1}{2} (u_B^2 + v_B^2) + p_B + \frac{y_B}{Fn^2} \quad (16)$$

여기서 아래 첨자 A,B는 Inflow Boundary와 자유표면의 교차점 그리고 자유표면 위의 임의점을 각각 의미한다. $u_A = 1$, $v_A = 1$, $x_B = 1 + \eta$ 로 하면 다음식을 얻는다.

$$\eta = Fn^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \{1 - (u_B^2 + v_B^2)\} \right] \quad (17)$$

식(17)에서 Fn 는 explicit하게 나타나지만 Re 영향은 속도 및 압력에 implicit 하게 포함되므로 이들의 고려가 동시적으로 이루어지게 됨을 알수 있다.

나) 수렴 및 비압축성 이력

$Re = 400$, $Fn = 0.6$, $\beta = 10$ 에 대한 수렴이력과 비압축성의 도달이력을 Fig.9에 나타낸다.

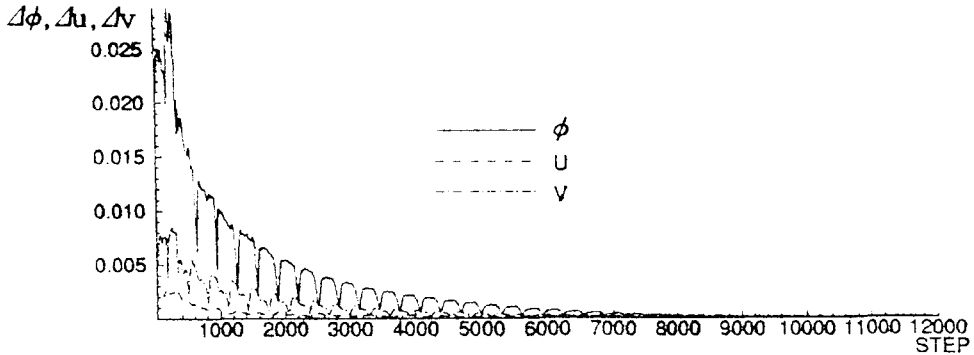
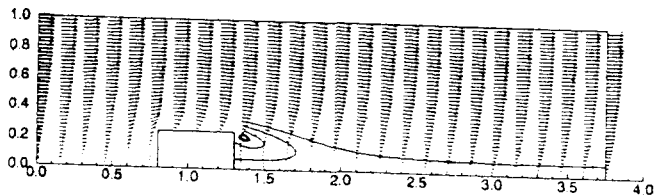


Fig.9 계산의 수렴, 비압축성 이력 ($Re = 400$, $Fn = 0.6$)

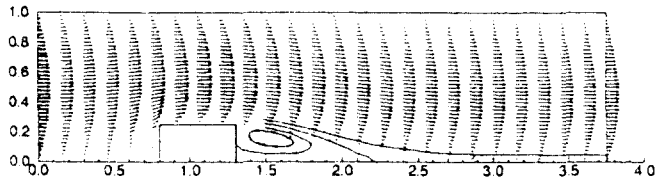
Fig.9로 부터 대략 반복계산 12,000회의 결과를 사용하여 비압축성, 정상상태에서의 유동상태를 파악하는 것으로 하였다.

다) 유동장에 대한 자유표면 효과

$Re = 200$, $Fn = 0.6$, 비교적 bump의 높이가 작은 한 경우에 대해 자유표면이 있는 경우와 없는 경우(자유표면을 rigid wall로 대치)에 대해 유동장 특성을 비교하였다.



(a)자유표면이 있는 경우

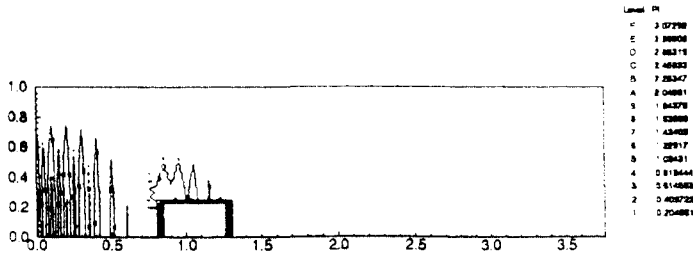


(b)자유표면이 없는 경우

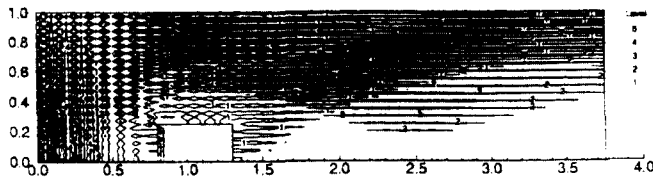
Fig.10 유동장 형상에 미치는 자유표면의 영향($Re = 200, Fn = 0.6$)

윗 그림에서 보는 바와 같이 전체적인 유선형상에 미치는 자유표면의 영향은 거의 없으나 쉽게 예상할 수 있는대로 bump뒤의 와류강도를 완화하는 방향으로 작용하는 것으로 보인다.

한편 자유표면의 존재가 유체 동압력 분포에 미치는 영향을 Fig.11 에 비교하였다.



(a)자유표면이 있는 경우



(b)자유표면이 없는 경우

Fig.11 동압력 분포에 미치는 자유표면의 영향($Re = 400, Fn = 0.6$)

같은 조건에서의 비교를 목적으로 유체 정압이 배제된 경우, 즉 ϕ 에 대한 비교를 수행한 결과, 자유표면의 존재는 압력분포의 공간변화를 완화하는 방향으로 작용하는 사실을 알 수 있다.

라) 자유 표면 변위

조선해양공학의 관점에서 자유표면 변위의 추정은 실제적으로 매우 중요한 의미를 갖는다. Re , Fn , 그리고 bump의 형상이 자유표면변위에 미치는 영향을 비교하면 다음과 같다.

(1) 자유표면변위와 Re 의 관계

Fig.12 는 $Fn = 0.6$, bump의 가로 및 높이는 각각 $H_1/H = 0.5$, $H_2/H = 0.75$ 로 하고 Re 를 변화시켜가며 자유수면변위의 변화를 보여주는 그림이다.

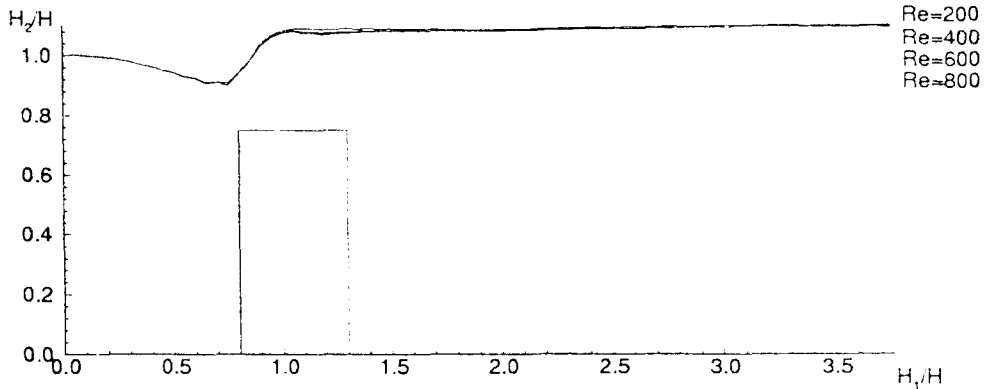


Fig.12 자유수면변위에 미치는 Re 의 영향($Fn=0.6$)

자유수면변위에 미치는 Re 의 영향은 거의 없어 보이나 이는 층류유동 내에서의 비교결과이고, 난류유동에 까지 분석결과가 확장될 수 있을 지는 미지수이다.

(2) 자유표면변위와 Fn

$Re = 600$, $H_1/H = 0.5$, $H_2/H = 0.75$ 로 고정하고 Fn 를 변화시켜가며 비교한 결과를 Fig.13에 나타낸다.

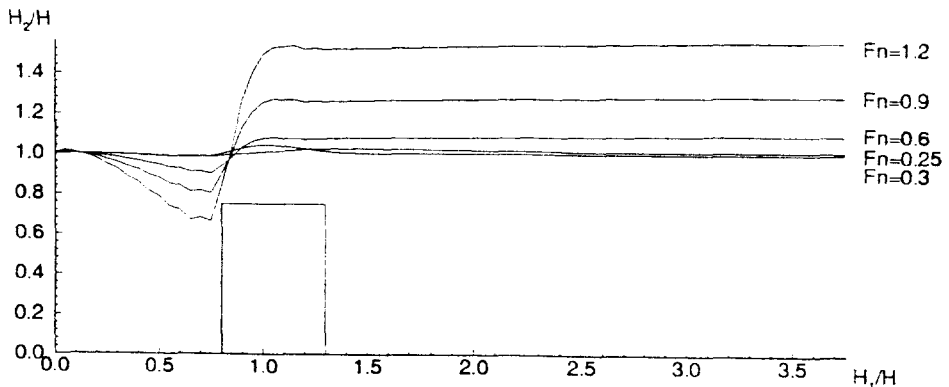


Fig.13 자유수면변위에 미치는 Fn 의 영향($Re = 600$)

그림에서 보는 바와 같이 자유수면 변위는 Fn 에 강력하게 의존하는 것을 알 수 있으며, 이는 식(17)로 부터도 예상 할 수 있으며, 조선공학에서 조파의 문제를 다룰때 오직 Fn 의 의존성만을 고려하는 근사개념의 타당성을 설명해 주는 부분이기도 하다.

(3) 자유수면변위 와 bump의 형상 관계

$Re = 200, Fn = 0.6$ 인 경우에 대해 Bump의 높이에 따른 자유수면변위의 변화를 Fig.14에 보인다.

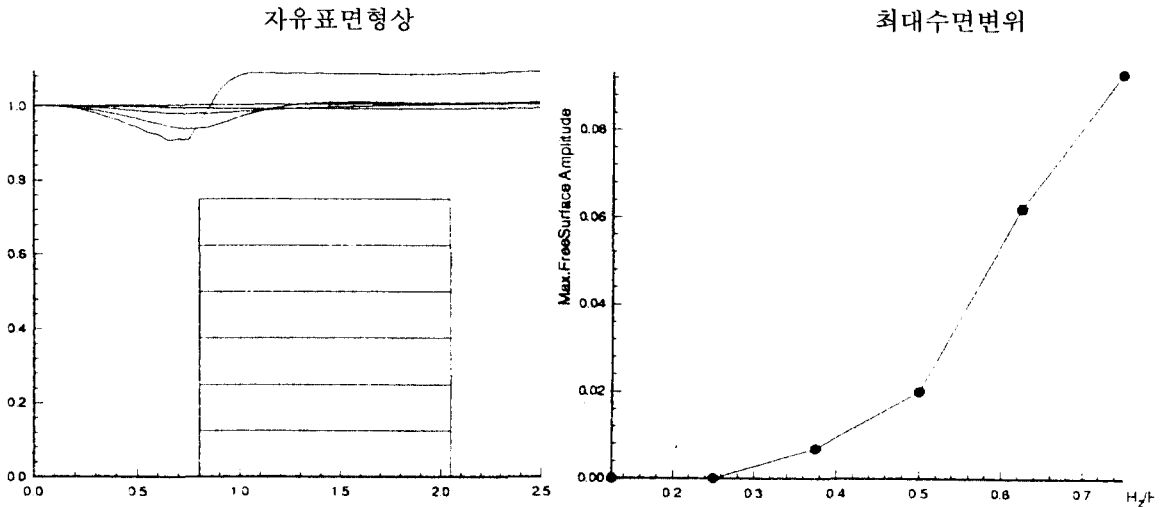


Fig.14 Bump의 높이가 자유표면 변위에 미치는 영향($Re = 200, Fn = 0.6$)

Bump의 높이(H_2)를 일정하게 하고 가로길이(H_1)을 변화시킬때 초래되는 자유수면 변위는 커다란 영향을 받지않아 여기서는 이를 생략하나, bump의 높이(H_2)가 자유수면 변위에 미치는 영향은 그림에서 보는바와 같이 매우 크다. 나아가 bump의 높이는 어느정도 높아지기 이전에는 거의 영향이 없는 반면, 어느 수준이상 높아지면 그영향이 현저하게 나타나는 강한 비선형성을 보이는 사실을 알 수 있다.

5. 결 론

이상과 같은 계산예와 결과에 대한 고찰을 통하여 다음과 같은 몇가지 결론을 얻을 수 있었다.

- (1)인공 압축성 방법의 양해법계산을 통하여 비압축성 유동의 수치 추정이 성공적으로 수행될 수 있었다.
- (2)이 방법을 통하여 비록 실험에 의한 검증은 생략되었으나 자유표면 유동에 대해서도 유효한 계산 결과를 얻을 수 있었다.
- (3)자유표면이 점성유동에 미치는 영향, Bump의 형상, Fn, Re 등이 자유 수면 변위에 미치는 영향등을 정성적으로 파악하였다.

통상 음해법과 짝을 이루어 성장하고 있는 인공압축성 방법이 양해법으로도 충분한 유효성을 갖고 있음이 입증되었으며, 향후 이 방법을 3차원 문제, 비정상 문제, 일반 좌표계로의 확장, 그리고 난류모델의 도입 등 연속 작업을 통하여 일반화를 시도할 필요가 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] M.Van Dyke : Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, P77-96 (1964)
- [2] C.A.J.Fletcher : Computational Techniques for Fluid Dynamics, vol.2, Springer - Verlay P368-369(1988)
- [3] A.J.Chorin : A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, J.Computational Physics(1967)
- [4] H.Miyata : Finite Difference Simulation of Nonlinear Waves, J.Fluid Mechanics, vol.157(1985)
- [5] F.Stern : Computation of Viscous Flow around a Propeller-Shaft Configuration with Infinite-Pitch Rectangular Blades, Proc. 5th Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima(1989)
- [6] M.Kawahara : Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Surface Flow, Int.J. Numerical Methods in Fluid, vol.7(1987)
- [7] 미국조선학회 : 기본조선학, 대한교과서 주식회사, P461-487(1969)
- [8] S.E.Rogers et al : On the Accuracy of the PseudoCompressibility Method in Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations, 18th Aiaa Conference(1985)
- [9] D.Kwak et al : A Three-Dimensional Incompressible Navire-Stoke Flow Solver Using Primitives, J.Aiaa vol.24, No.3(1986)
- [10] B.S.Yoon : A numerical Simulation of Free Surface Laminar flow around a circular cylinder vertically Piercing Free Surface, J.SNAK,
- [11] B.F.Armaly, F.Durst, J.C.F.Pereire and B.Schönung : Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow, J. of Fluid Mechanics, vol.127(1983)
- [12] P.M.Gerhart, R.J.Gross, J.I.Hochstein : Fundamentals of Fluid Mechanics, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company. P381-386