연구논문집 제8권 제1호 p.41~46, 1977. 1

유한대판법에 의한 보강판의 비선형 해석

이 용 재
토목공학과

〈요 약〉

보강판의 비선형 해석을 위해 증분이론과 대판요소를 사용하여 유한요소법의 정식화를 수행했다.

Green의 strain tensor와 Kirchhoff의 stress tensor를 사용한 증분이론이 사용되었고 보강재는 Beam-column으로 취급되었다.

Non-linear Analysis of Stiffened Plates by the Finite Strip Method

Lee, Yong Jae
Dept. of Civil Engineering

〈Abstract〉

The formulation of finite element method was performed for the nonlinear analysis of stiffened plate by using incremental theory and strip elements.

The incremental theory by Lagrangian approach which uses Green strain tensor and Kirchhoff stress tensor was used and stiffeners were treated as beam-columns.

I. 서 론

대용량 전자계산기의 개발과 함께 60년대 말부터 급속도의 발전을 보게된 유한요소법은 이제 모든 면에서 그 위력이 과시 되어있어 역학에서 가장 난해한 부분의 하나로 취급되어 오던 비선형 문제가 이제 연구과제로 크로즈업 되어 있다. 그중에서도 보강판의 해석은 교량공학자들과 조선공학자들의 많은 관심을 모으고 있는 부분이나 비선형을 고려한 유한요소법적 해석은 거의 없는것 같다.

본 논문에서는 4변 단순지지의 보강판에 대한 비선형 해석을 증분이론과 유한요소법을 결합함으로써 그 이론적 기초를 확립하고저한다.

대판요소를 평판 및 평판구조물(Box-Girder, Folded Plate Structure)의 선형 및 좌굴해석과 평판의 비선형해석에 사용함으로써 그의 유용성은 이미 보고되어 있으나 보강판에의 이용은 아직 시도되고 있지 않다.

본 논문에서는 대판요소를 보강판 비선형 해석에 적용함으로써 요소수와 계산시간을 단축할 수 있을것으로 기대되는 한편 이방법을 발전시켜 곡선 보강판에도 이용할 수 있을것으로 생각된다.

II. 증분이론

기하학적 비선형과 재료비선형을 동시에 고려할 수 있는 가장 유력한 비선형 문제의 해법으로 하중상태를 여러단계의 평형 상태로 나누어 각단계를 $\Omega^0\Omega^1\cdots\Omega^N\Omega^{N+1}\cdots\Omega^f$로 표시한다.

여기서 $\Omega^0\Omega^f$는 각각 처음과 마지막 상태이고 Ω^N는 임의의 상태이다.

이제 Ω^N에서의 모든 변수 즉 응력, 변위, 표면력을 σ_{ij}^0, u_i^0, f_i^0로 표시하고 이상태에서의 모든 양을 기지로 한다.

Ω^{N+1}상태에서의 응력, 변위, 그린력을 $\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}$, $u_i^0+u_i$, $f_i^0+f_i$ 이라하면 증분이론은 다음과 같이 표시된다.

$$\iiint\left[\sigma_{ij}\,\delta e_{ij}^*+\sigma_{ij}^0\frac{1}{2}\delta(u_{K,i}\,u_{K,j})\right]dV-\iint f_i\,\delta u_i\,dS=dw_r \cdots\cdots(2\text{-}1)$$

$$\delta w_r=\iint f_i^0\,\delta u_i\,dS-\iiint\sigma_{ij}^0\,\delta e_{ij}^*\,dV\cdots\cdots(2\text{-}2)$$

$$\iiint\sigma_{ij}\,\delta e_{ij}^*\,dV=\iiint\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV+\iiint\sigma_{ij}\frac{1}{2}(u_{K,i}^0\,\delta u_{K,j}+u_{K,j}^0\,\delta u_{K,i})dV \quad (2\text{-}3)$$

여기서

$$e_{ij}^*=\frac{1}{2}\{u_{i,j}+u_{j,i}+u_{K,i}^0\,u_{K,j}+u_{K,j}^0\,u_{K,i}\}=\varepsilon_{ij}+\eta_{ij}\cdots\cdots(2\text{-}4)$$

만약 Ω^N상태가 평형상태에 있다면 δw_r는 영이지만 일반적으로 증분이론에서는 미소고차항의 생략과 계산의 부정확으로 완전 평형상태에 있지 않고 따라서 δw_r항은 평형상태를 검사하기 위해서도 필요한 항이다.

위의 식에서 $\iiint\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}dV$, $\iiint\sigma_{ij}\frac{1}{2}(u_{K,i}^0\,\delta u_{K,j}+u_{K,j}\delta u_{K,i})dV$, $\iiint\sigma_{ij}^0\frac{1}{2}\delta(u_{K,i}\,u_{K,j})dV$는 $[K_0]$, $[K_\varepsilon]$, $[K_\sigma]$에 관계되는 항으로 유한요소법에서 이들은 각각 증분강성행렬(incremental stiffness matrix) 초기변형 강성행렬(initial displacement stiffness matrix), 초기응력강성행렬(initial stress stiffness matrix)라한다.

그리고 δw_r는 잔차행렬(residual matrix)에 관계된다. 이들에 대해서는 다음장에서 논한다. Euler의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\iiint\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV+\iiint\sigma_{ij}^0\frac{1}{2}\delta(u_{K,i}\,u_{K,j})dV=0 \quad (2\text{-}5)$$

Ⅲ. 변위함수와 강성행렬

1. 평판(plate)

변위함수를 다음과 같이 가정한다.

$$\bar{U}_{(x,y,z)}=u_{(x,y)}-z\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\bar{V}_{(x,y,z)}=v_{(x,y)}-z\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\bar{W}_{(x,y,z)}=w_{(x,y)}\cdots\cdots(3\text{-}1)$$

u, v, w를 절점변위로 표시하여 다음과 같다.

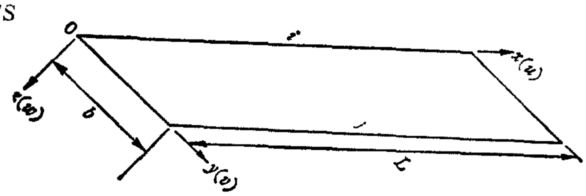

Fig. 1 대판요소

$$u_{(x,y)}=\sum_m(f_1\bar{u}_{im}+f_2\bar{u}_{yim}+f_3\bar{u}_{jm}+f_4\bar{u}_{yjm})U_m$$

$$v_{(x,y)}=\sum_m(f_1\bar{v}_{im}+f_2\bar{v}_{yim}+f_3\bar{v}_{jm}+f_4\bar{v}_{yjm})V_m$$

$$w_{(x,y)}=\sum_m(f_1\bar{w}_{im}+f_2\bar{\theta}_{im}+f_3\bar{w}_{jm}+f_4\bar{\theta}_{jm})W_m \quad (3\text{-}2)$$

$$f_1=1-\frac{3y^2}{b^2}+\frac{2y^3}{b^3}$$

$$f_2=y-\frac{2y^2}{b}+\frac{y^3}{b^2}$$

$$f_3=\frac{3y^2}{b^2}-\frac{2y^3}{b^3}$$

$$f_4=\frac{y^3}{b^2}-\frac{y^2}{b}\cdots\cdots(3\text{-}3)$$

$$U_m=\left(-\frac{2}{L}\right)^m\left(x-\frac{L}{2}\right)^m$$

$$V_m=W_m=\sin\frac{m\pi}{L}x \qquad m=1,\ 3,\ 5\cdots\cdots(3\text{-}4)$$

$f_1\sim f_4$; y방향의 전개함수 (3차식)

U_m, V_m, W_m; x방향의 전개함수

변위를 행렬로 표시하면

$$\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\sum_m\begin{bmatrix}f_1U_m & f_2U_m & 0 & 0 & f_3U_m & f_4U_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & f_1V_m & f_2V_m & 0 & 0 & f_3V_m & f_4V_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{im}\\ \bar{u}_{yim}\\ \bar{v}_{im}\\ \bar{v}_{yim}\\ \bar{u}_{jm}\\ \bar{u}_{yjm}\\ \bar{v}_{jm}\\ \bar{v}_{yjm}\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_m[N_{pim}\ N_{pjm}]\begin{Bmatrix}\delta_{pim}\\ \delta_{pjm}\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_m[N_{pm}]\{\delta_{pm}\}$$

$$=N_{p1}\,\delta_{p1}+N_{p2}\,\delta_{p2}+\cdots+N_{pr}\,\delta_{pr}$$

$$=[N_{p1}\,N_{p2}\,N_{p3}\cdots N_{pr}]\begin{Bmatrix}\delta_{p1}\\ \delta_{p2}\\ \delta_{p3}\\ \vdots\\ \delta_{pr}\end{Bmatrix}=[N_p]\{\delta_p\}\cdots(3\text{-}5)$$

$$w=\sum_m[f_1w_m\,f_2w_m\,f_3w_m\,f_4w_m]\begin{Bmatrix}\overline{w}_{im}\\ \overline{\theta}_{im}\\ \overline{w}_{jm}\\ \overline{\theta}_{jm}\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_m[N_{bim}\,N_{bjm}]\begin{Bmatrix}\delta_{bim}\\ \delta_{bjm}\end{Bmatrix}=\sum_m[N_{bm}]\{\delta_{bm}\}$$

$$=N_{b1}\,\delta_{b1}+N_{b2}\,\delta_{b2}+\cdots+N_{br}\,\delta_{br}$$

$$=[N_{b1}N_{b2}\cdots N_{br}]\begin{Bmatrix}\delta_{b1}\\ \delta_{b2}\\ \vdots\\ \delta_{br}\end{Bmatrix}=[N_b]\{\delta_b\}\cdots\cdots\cdots(3\text{-}6)$$

$$\begin{Bmatrix}U\\ V\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}-Z\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}=[N_p]\{\delta_p\}-Z[G]\{\delta_b\}$$

$$=\Big[[N_p]\quad -z\,G]\Big]\begin{Bmatrix}\delta_p\\ \delta_b\end{Bmatrix}$$

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}U\\ V\\ W\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[N_p] & -z[G]\\ 0 & [N_b]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_p\\ \delta_b\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}\cdots(3\text{-}7)$$

$[N]$을 형상함수(shape function)이라 한다.

다음 식들을 정의한다.

$$\{\varepsilon_p\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_m\left[\begin{matrix}f_1\dfrac{\partial U_m}{\partial x} & f_2\dfrac{\partial U_m}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}V_m & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}V_m\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}U_m & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}U_m & f_1\dfrac{\partial V_m}{\partial x} & f_2\dfrac{\partial V_m}{\partial x}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}f_3\dfrac{\partial U_m}{\partial x} & f_4\dfrac{\partial U_m}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}V_m & \dfrac{\partial f_4}{\partial y}V_m\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial y}U_m & \dfrac{\partial f_4}{\partial y}U_m & f_3\dfrac{\partial V_m}{\partial x} & f_4\dfrac{\partial V_m}{\partial x}\end{matrix}\right]$$

$$\begin{Bmatrix}\overline{u}_{im}\\ \overline{u}_{yim}\\ \overline{v}_{im}\\ \overline{v}_{yim}\\ \overline{u}_{jm}\\ \overline{u}_{yjm}\\ \overline{v}_{jm}\\ \overline{v}_{yjm}\end{Bmatrix}=\sum_m[B_{pm}]\{\delta_{pm}\}$$

$$=[B_p]\{\delta_p\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}8)$$

$$\{\rho\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}=\sum_m\left[\begin{matrix}f_1\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} & f_2\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}w_m & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}w_m\\ 2\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial w_m}{\partial x} & 2\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial w_m}{\partial x}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}f_3\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} & f_4\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}w_m & \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}w_m\\ 2\dfrac{\partial f_3}{\partial y}\dfrac{\partial w_m}{\partial x} & 2\dfrac{\partial x_4}{\partial y}\dfrac{\partial w_m}{\partial x}\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_m[B_{bm}]\{\delta_{bm}\}=[B_b]\{\delta_b\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}9)$$

$$[C_0]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_0}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} & \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}10)$$

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}=\sum_m\begin{bmatrix}f_1\dfrac{\partial w_m}{\partial x} & f_2\dfrac{\partial w_m}{\partial x} & f_3\dfrac{\partial w_m}{\partial x} & f_4\dfrac{\partial w_m}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}w_m & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}w_m & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}w_m & \dfrac{\partial f_4}{\partial y}w_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{w}_{im}\\ \overline{\theta}_{im}\\ \overline{w}_{jm}\\ \overline{\theta}_{jm}\end{Bmatrix}=\sum_m[G_m]\{\delta_{bm}\}=[G]\{\delta_b\}\cdots\cdots(3\text{-}11)$$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$=[B_p]\{\delta_p\}-z[B_b]\{\delta_b\}$$

$$=\Big[[B_p]-z[B_b]\Big]\begin{Bmatrix}\delta_p\\ \delta_b\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}12)$$

$$\{\varepsilon_c\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}^c=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_0}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} & \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$=[C_0]\,[G]\{\delta_b\}$$

$$=[B_b{}^c]\{\delta_b\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}13)$$

$$\{e^*\}=\{\varepsilon\}+\{\varepsilon_c\}=\Big[[B_p]-z[B_b]\Big]\begin{Bmatrix}\delta_p\\ \delta_b\end{Bmatrix}+[B_b{}^c]\{\delta_b\}$$

$$=\Big[[B_p]-z[B_b]+[B_b^e]\Big]\begin{Bmatrix}\delta_p\\ \delta_b\end{Bmatrix}=[\bar{B}]\{\delta\} \quad (3\text{-}14)$$

여기서 $[\bar{B}]=[B]+[B_\varepsilon]=\Big[[B_p]-z[B_\varepsilon]\Big]$

$$+\Big[0 \ \ [B_b^\varepsilon]\Big] \cdots\cdots (3\text{-}15)$$

(2-1)~(2-5)식에 따라 강성행렬을 계산한다.

$$\iiint \sigma_{ij}\cdot\delta e_{ij}^*\,dv=d\{\delta\}^T\int[\bar{B}]^T[D]\,[\bar{B}]\,dv\{\delta\}$$

$$=d\{\delta\}^T\iiint([B]^T[D]\,[B]+[B]^T[D]\,[B_\varepsilon]$$
$$+[B]^T[D]\,[B_\varepsilon]+[B_\varepsilon]^T[D]\,[B]$$
$$+[B_\varepsilon]^T[D]\,[B_\varepsilon])dv\{\delta\}$$
$$=d\{\delta\}^T[\bar{K}]\{\delta\} \cdots\cdots (3\text{-}16)$$

여기서

$$[\bar{K}]=[K_0]+[K_\varepsilon] \cdots\cdots (3\text{-}17)$$

$$[K_0]=\iiint[B]^T[D]\,[B]\,dv$$

$$[K_\varepsilon]=\iiint([B]^T[D]\,[B_\varepsilon]+[B_\varepsilon]^T[D]\,[B]$$
$$+[B_\varepsilon]^T[D]\,[B_\varepsilon])dv \cdots\cdots (3\text{-}18)$$

$$\iiint\sigma_{ij}{}^0\frac{1}{2}(u_{K,i}\,u_{K,j})dv$$

$$=\int d\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\sigma_x{}^0 & \tau_{xy}{}^0\\ \tau_{xy}{}^0 & \sigma_y{}^0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}dv$$

$$=d\{\delta_b\}^T\int[G]^T[P]\,[G]\,dv\{\delta_b\}$$

$$=d\{\delta\}^T[K\sigma]\{\delta\}\cdots\cdots (3\text{-}19)$$

여기서

$$[P]=\begin{bmatrix}\sigma_x{}^0 & \tau_{xy}{}^0\\ \tau_{xy}{}^0 & \sigma_y{}^0\end{bmatrix}$$

$$[K_\sigma]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [K_\sigma{}^b]\end{bmatrix}$$; initial stress matrix

$$[K_\sigma{}^b]=\int[G]^T[P]\,[G]\,dv \cdots\cdots (3\text{-}20)$$

$[K_T]=[K]+[K_\varepsilon]+[K\sigma]$; Total stiffness matrix$\cdots$(3-21)

$$[K_0]=\int\begin{bmatrix}[B_p]^T[D]\,[B_p] & -z[B_p]^T[D]\,[B_b]\\ -z[B_b]^T[D]\,[B_p] & z^2[B_b]^T[D]\,[B_b]\end{bmatrix}dv$$

$$=\begin{bmatrix}[K^e{}_{pp}] & [K^p{}_{pb}]\\ [K^p{}_{bp}] & [K^e{}_{bb}]\end{bmatrix}\cdots\cdots (3\text{-}22)$$

$$[K_\varepsilon]=\int\begin{bmatrix}0 & [B_p]^T[D]\,[C_0]\,[G]\\ [G]^T[C_0]^T[D]\,[B_b] & -z[B_p]^T[D]\,[C_0]\,[G]\\ & -z[G]^T[C_0]^T[D]\,[B_b]+[G]^T[C_0]^T[D]\,[C_0]\,[G]\end{bmatrix}dv$$

$$=\begin{bmatrix}0 & [K^e{}_{pb}]\\ [K^e{}_{bp}] & [K^p{}_{bb}]+[K^e{}_G]\end{bmatrix}\cdots\cdots (3\text{-}23)$$

$$[K_\sigma]=\int\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [G]^T[P]\,[G]\end{bmatrix}dv=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [K_\sigma{}^b]\end{bmatrix}$$
$$\cdots\cdots (3\text{-}24)$$

$[K_0]$, $[K_\varepsilon]$, $[K_\sigma]$를 대입하면 $[K_T]$는 다음과 같이 된다.

$$[K_T]=[K_0]+[K_\varepsilon]+[K_\sigma]$$

$$=\begin{bmatrix}[K_{pp}{}^e] & [K_{pb}{}^e]+[K_{pb}{}^p]\\ [K_{bp}{}^e]+[K_{bp}{}^p] & [K_{bb}{}^e]+[K_{bb}{}^p]\\ & -[K_G{}^e]+[K_\sigma{}^b]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[K_{pp}] & [K_{pb}]\\ [K_{bp}] & [K_{bb}]\end{bmatrix}\cdots\cdots (3\text{-}25)$$

Euler Buckling에서는 다음과 같이 된다.

$$[K^e{}_{bb}]+[K^b{}_\sigma]=0\cdots\cdots (3\text{-}26)$$

$$\delta w_r=\iint g_i{}^0\,\delta u_i\,ds-\iiint\sigma_{ij}{}^0\,\delta e^*{}_{ij}\,dv$$

$$=d\{\delta\}^T\iint[N]^T\{g^0\}ds-d\{\delta\}^T\iiint[\bar{B}]^T\{\sigma_0\}dv$$

$$=d\{\delta\}^T\{F\}-d\{\delta\}^T\{R\}\cdots\cdots (3\text{-}27)$$

여기서

$$\{R\}=\begin{Bmatrix}\gamma_s{}^0\\ \gamma_b{}^0\end{Bmatrix}=\iiint\begin{Bmatrix}[B_p]^T\{\sigma_0\}\\ -z[B_b]^T\{\sigma_0\}+[G]^T[C_0]^T\{\sigma_0\}\end{Bmatrix}dv$$
$$\cdots\cdots (3\text{-}28)$$

$$L=\{F\}-\{R\}\cdots\cdots (3\text{-}29)$$

평판만을 생각했을때의 평형방정식은 다음과 같다.

$$([K_0]+[K_\varepsilon]-[K_\sigma])\{\sigma\}-\{\varDelta F\}=\{F\}-\{R\}\ (3\text{-}30)$$

2. 보강재

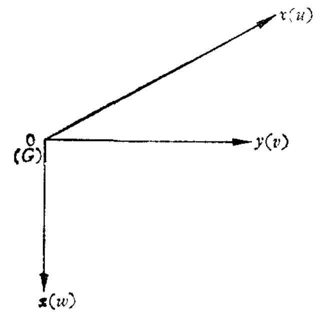

Fig. 2

도심 G를 원점으로 잡는다.

임의점의 변위는 다음과 같다.

$$\bar{U}_{(x,y,z)}=u_{(x)}-zw'_{(x)}-yv'_{(x)}+\theta'_{(x)}w_{n(y,z)}$$
$$\bar{V}_{(x,y,z)}=v_{(x)}-z\theta_{(x)}$$
$$\bar{W}_{(x,y,z)}=w_{(x)}+y\theta_{(x)} \cdots\cdots (3\text{-}31)$$

u, v, w는 도심 G의 변위를 표시한다. 또 w_n은

뒴함수(warping function)이다. 이들은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\bar{U}_{(x,y,z)}=\bar{u}_p+(y_p-y)v'_p+(z_p-z)w_p'+\{(y_p-y)(z_p-z_s)-(z_p-z)(y_p-y_s)\}\theta'$$

$$\bar{V}_{(x,y,z)}=\bar{v}_p+(z-z_p)\theta$$

$$\bar{W}_{(x,y,z)}=\bar{w}_p+(y-y_p)\theta \quad\cdots\cdots(3\text{-}32)$$

p는 평판과의 결합점을 표시하고 s는 전단중심을 표시한다.

위의 식에서 전단중심에 대한 뒴함수를 무시하고 유도한 것으로 T형이나 ㄱ형 I형에만 이용할 수 있다.

절점의 변위는 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{U}_p=U_t=\sum_m \bar{u}_{im}U_m$$

$$\bar{V}_p=V_t=\sum_m \bar{v}_{im}V_m$$

$$\bar{W}_p=w_t=\sum_m \bar{w}_{im}W_m$$

$$\theta_p=\theta_t=\sum_m \bar{\theta}_{im}\Theta_m \quad\cdots\cdots(3\text{-}33)$$

따라서 (3-32)식은 다음과 같이 된다.

$$U_{(x,y,z)}=\sum_m\bar{u}_{im}U_m+(y_p-y)\sum_m\bar{v}_{im}V'_m+(z_p-z)\sum_m\bar{w}_{im}W'_m+\{(y_p-y)(z_p-z)-(z_p-z)(y_p-y_s)\}\sum_m\bar{\theta}_{im}\Theta_m$$

$$\bar{V}_{(x,y,z)}=\sum_m\bar{v}_{im}V_m-(z-z_p)\sum_m\bar{\theta}_{im}\Theta_m$$

$$\bar{W}_{(x,y,z)}=\sum_m\bar{w}_{im}W_m+(y-y_p)\sum_m\bar{\theta}_{im}\Theta_m\cdots(3\text{-}34)$$

Matrix형으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\bar{U}\\ \bar{V}\\ \bar{W}\end{Bmatrix}=\sum_m\begin{bmatrix}U_m & (y_p-y)V_m' & (z_p-z)W_m' & \{(y_p-y)(z_p-z_s)\}\Theta_m\\ 0 & V_m & 0 & -(z-z_p)\Theta_m\\ 0 & 0 & W_m & (y-y_p)\Theta_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{im}\\ \bar{v}_{im}\\ \bar{w}_{im}\\ \theta_{im}\end{Bmatrix}$$

$$=[N]_s\{\delta\}_s \quad\cdots\cdots(3\text{-}35)$$

전단응력을 무시하고 수직응력만을 고려하면

$$\varepsilon_x=\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}=\sum_m[U_m'(y_p-y)V_m''(z_p-z)Wz''\ \{(y_p-y)(z_p-z_s)(z_p-z)(y_p-y_s)\}\theta_m'']\begin{Bmatrix}\bar{u}_{im}\\ \bar{v}_{im}\\ \bar{w}_{im}\\ \theta_{im}\end{Bmatrix}$$

$$=\sum_m[B_{pm}]\{\delta_{pm}\}+\sum_m[B_{bm}]\{\delta_{bm}\}$$

$$=[B_p]\{\delta_p\}+[B_b]\{\delta_b\}$$

$$=[B]_s\{\delta\}_s \quad\cdots\cdots(3\text{-}36)$$

$$\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=\frac{\partial w_0}{\partial x}\sum_m[W_m'-(y^p-y)\Theta_m']\begin{Bmatrix}\bar{w}_{im}\\ \theta_{im}\end{Bmatrix}$$

$$=[C_0]\sum_m[G_m]\{\delta_{bm}\}$$

$$=[C_0]_s[G]_s\{\delta_b\}_s=[B_b^e]\{\delta_b\}_s$$

$$=[0.\ [B_{be}]]\{\delta\} \quad\cdots\cdots(3\text{-}37)$$

여기서

$$[C_0]=\frac{\partial\bar{w}_0}{\partial x}=\sum_m[W_m'\ (y-y_p)\Theta_m']\begin{Bmatrix}\bar{w}^0_{im}\\ \bar{\theta}^0_{im}\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=[G]\{\delta_b\} \quad\cdots\cdots(3\text{-}38)$$

$$[e_x]=\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{w}^0}{\partial x}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=[B]\{\delta\}+[B_e][\,]\{\delta\}$$

$$=[\bar{B}]_s\{\delta\}_s \quad\cdots\cdots(3\text{-}39)$$

평판의 경우와 마찬가지로 강성행렬을 구하면 다음과 같다.

$$[K_0]=\int[B]^T[D][B]dv$$

$$=\int\begin{bmatrix}[B_p]^T[D][B_p] & [B_p]^T[D][B_b]\\ [B_b]^T[D][B_p] & [B_b]^T[D][B_b]\end{bmatrix}dv$$

$$[K_e]=\int([B]^T[D][B_e]+[B_e]^T[D][B]+[B_e]^T[D][B_e])dv$$

$$[K_\sigma]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [K_{\sigma b}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \int[G]^T[P][G]dv\end{bmatrix} \quad (3\text{-}40)$$

여기서 $[P]=[\sigma_x^0]$

잔차행열도 마찬가지로 구해진다.

3. 해석순서

하중증분법으로 시행한다. 먼저 (3-30)식을 구조물 전체에 대해 수립하여 이것을 푼다. 여기서 보강재는 평판과의 접합점에 요소의 절점이 있는 것으로 하고 보강재의 강성행렬을 접합점에서 평판의 강성행렬에 연결시킨다.

처음단계 및 각계속 단계후에는 절점좌표가 수정되고 또 전체변위, 변형도 및 응력도가 각증분 단계에서 얻어진 결과를 더함으로써 구해진다.

참 고 문 헌

1. O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, (1971).
2. H.C. MARTIN, *Introduction to Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, (1973).
3. HUEBNER, *The Finite Element Method for Engineers*, (1974).
4. 山田嘉昭, マトリックス法應用, 東京大學出版會

(1972).

5. 山田嘉昭, マトリックス法 材料力學, 培風館 (1970).

6. 川井忠彦, 座屈問題解析, 培風館 (1974).

7. WASHIZU, *Variational Methods in Elastcity and Plasticity*, 2nd edition, Pergamon press, (1975).

8. Y.K. CHEUNG, "*Folded plate structures by finite strip method*, *Proc.*, *ASCE*, ST. 12 (1966),

9. 吉田宏一郎, 帶板要素による平板構造座屈解析, 日本造船學會論文集 第130號 (1971).

10. 吉田宏一郎, "帶板要素による平板構造の曲げ解析," 日本造船學會論文集 第132號 (1972).

11. 上田, 松石, "有限帶板法による平板の彈塑性 大たわみ解析,"關西造船協會誌 第154號 昭和49年9月

12. L.D. HOFMEISTER, G.A. GREENBAUM., "Large strain, Elasto-plastic Finite Element Analysis" *AIAA Journal*, Vol.9, No.7, July 1971.