

高次變位函數를 이용한 板의 解析

陳 致 燮
土 木 工 學 科

〈要 約〉

有限帶板法에 있어서, 要素境界에서의 처짐, 變位角, 曲率의 適合條件을 滿足시키기 爲하여 高次變位函數를 利用했고 荷重 vector를 求하는 데는 直接積分法에 依하였다. 적은 數의 要素간으로도 板解析에 有用한 方法임을 알 수 있다.

The Analysis of Plates using Higher Order Displacement Functions

Jin, Chi Sub
Dept of Civil Engineering

〈Abstract〉

Higher order displacement functions are used in the finite strip method to give compatibility of deflection, slope and curvature at strip boundaries, and these are combined with a direct integrating approach for the evaluation of load vectors.

This method is found to be efficient in solving plate problems even with a reduced number of strips.

I 序 論

有限帶板法은 처음 Cheung(1968)이 矩形 Slab에 서 提案했으며, Powell과 Ogden(1969)이 같은 問題에 對해서 獨立적으로 提示했다. 繼續적이고 急進적인 研究를 Cheung이 Canada에서, Scordelis, William, Meyer가 美國에서, Loo와 Cusens가 英國에서 行하였다. Cheung이 繼續 使用해 온 變位函數는 3次多項式으로 이것은 단지 要素境界에서 처짐과 變位角만이 連續條件을 滿足하고 있을 뿐 橫方向 moment의 連續條件을 滿足하지 못하고 있다.

여기서는 이런 不連續을 除去하고 보다 좋은 近似解를 얻기 爲하여 高次多項式을 變位函數로 擇했고, 荷重 vector는 荷重函數 $q(x,y)$ 를 Sinc 級數로 展開하지 않고 直接 積分하므로써 어떤 形態의 載荷에도 適用도록 했다. 또 이 變位函數의 有用性을 檢證하기 爲하여 strip內에 1個의 補助節線을 取하

고 5次 多項式을 利用한 板의 解析을 例로 들었다.

II. 變位函數

板構造를 幅方向으로 分割하여 이 中 하나의 幅을 b , 長이를 L 로 놓고 $b \times L$ 을 한 개의 strip 要素로 하여 Fig. 1(a)와 같이 그 끝에서 單純支持된 것을 생각한다.

節線 i, j 로 定義되는 任意의 strip 要素 I의 變位函數를 Cheung은 3次多項式을 利用하였다. 即

$$w = \sum_{n=1}^3 [C^n] \{w_n^j\} \sin \alpha_n x \quad (1)$$

여기서 $[C^n]$ 는 係數行列로서 y 만의 函數이고

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \text{이다.}$$

그러나 이 式을 利用했을 때 strip境界에서 처짐과 變位角의 連續條件은 滿足하나 橫方向 moment의 不連續이 생기고, 自由端에서는 橫方向 moment가 0가 되지않고 多少 남는 것을 볼 수 있었다.

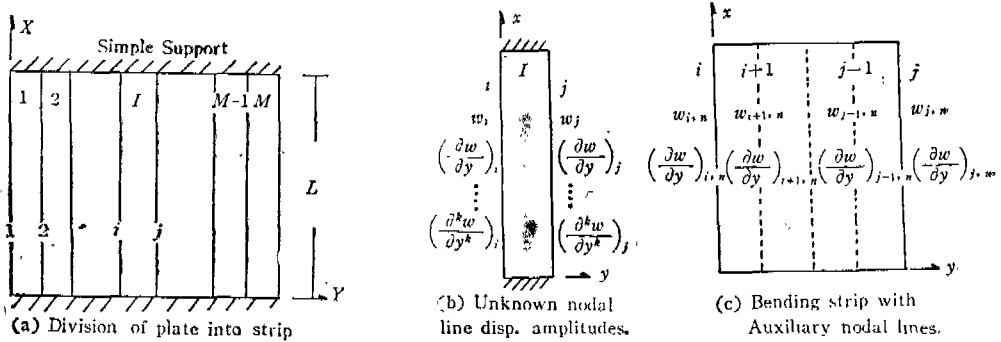


Fig. 1. Finite strip simulation for plate bending

이것은 假定된 變位函數의 次數가 낮기 때문에 일어나는 것으로 正確한 結果를 얻기 爲해서는 많은 數의 strip으로 나누는 것이 必要하다. 이리하여 比較的 작은 數의 strip은 使用하여 보다 正確한 값을 얻기 爲해서는 高次의 變位函數를 使用하는 것이 바람직하다.

strip 境界에서 變位場의 k 次 導函數까지 要求된다고 할 때의 N 次 變位函數는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = \sum_{n=1}^r [C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{ki}, C_{0j}, C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{kj}] \{w_n\} \sin \alpha_n x$$

$$= \sum_{n=1}^r [C^I] \{w_n^I\} \sin \alpha_n x = \sum_{n=1}^r \{w_n^I\}^T [C^I]^T \sin \alpha_n x \quad (2)$$

여기서 $[C^I]$ 는 係數行列이고
또 $\{w_n^I\} = \{w_{jn}, w_{in}^I, w_{in}^{II}, \dots, w_{in}^K, w_{jn}, w_{jn}^I, w_{jn}^{II}, \dots, w_{jn}^K\}^T$ (3)

여기서 $w_{in}^K = \left(\frac{\partial^K w}{\partial y^K}\right)_{in}$ 이고 $w_{jn}^K = \left(\frac{\partial^K w}{\partial y^K}\right)_{jn}$ 이다.

有限要素法에서 四角形要素의 内部節點을 除去하여 4個의 二角形要素로 만드는 方法과 類似하게 strip 内部에 補助節線들을 생각하면 (Fig. 1. (c)), 圖에서 한 strip에 對한 變位振幅 Vector는

$$\{w_n^I\} = \left[w_{in}, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{in}, w_{i+1,n}, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i+1,n}, \dots, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{j-1,n}, w_{jn}, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{jn} \right]^T \quad (4)$$

N 차변위 함수를 사용했을 때 한 strip에 k 개의 節線이 必要하다. 즉

$$2k = N + 1$$

이리하여 k 個의 節線을 가진 單純支持 strip에 對한

變位函數는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$w = \sum_{n=1}^r [C_1, C_2, \dots, C_{2k-1}, C_{2k}] \sin \alpha_n x \begin{bmatrix} w_{in} \\ \theta_{in} \\ w_{jn} \\ \theta_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{n=1}^r [C^I] \sin \alpha_n x \{w_n^I\} \quad (5)$$

여기서 C_i 는 y 만의 函數이고 $\theta = \frac{\partial w}{\partial y}$ 이다.

III. 剛度行列

strip 要素 I의 total potential energy는 다음 式으로 얻어진다.

$$U_T^I = U_S^I + U_P^I \quad (6)$$

여기서 strain energy U_S^I 는

$$U_S^I = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{M\}^T \{\phi^I\} dx dy \quad (7)$$

이고 外力에 依한 potential energy U_P^I 는

$$U_P^I = - \int_0^L \int_0^b q^I(x, y) w \cdot dx dy \quad (8)$$

이다. 여기서 $q^I(x, y)$ 는 strip 要素에 作用하는 荷重이다.

matrix form으로全體를 簡單히 쓸이면

$$U_T^I = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \{M\}^T \{\phi^I\} dx dy - \int_0^L \int_0^b \{w_n^I\}^T [C^I] q^I(x, y) \sin \alpha_n x \cdot dx dy \quad (9)$$

要素의 曲率과 moment vector는 各各

$$\{\phi^I\} = \sum_{n=1}^r [B_n^I] \{w_n^I\} \quad (10)$$

$$k_{11} = \frac{523}{6930} Lb\alpha_n^4 D_x + \frac{139}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_1 + \frac{2546}{35} \frac{L}{b^3} D_y + \frac{278}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{21} = \frac{19}{4620} Lb^2\alpha_n^4 D_x + \frac{59}{210} L\alpha_n^2 D_1 + \frac{569}{35} \frac{L}{b^2} D_y + \frac{13}{210} L\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{22} = \frac{1}{3465} Lb^3\alpha_n^4 D_x + \frac{1}{45} Lb\alpha_n^2 D_1 + \frac{166}{35} \frac{L}{b} D_y + \frac{2}{45} Lb\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{31} = \frac{2}{63} Lb\alpha_n^4 D_x - \frac{128}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_1 - \frac{256}{5} \frac{L}{b^3} D_y - \frac{256}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{32} = \frac{1}{315} Lb^2\alpha_n^4 D_x - \frac{4}{105} L\alpha_n^2 D_1 - \frac{64}{5} \frac{L}{b^2} D_y - \frac{8}{105} L\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{33} = \frac{64}{315} Lb\alpha_n^4 D_x + \frac{256}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_1 + \frac{512}{5} \frac{L}{b^3} D_y + \frac{512}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{41} = -\frac{2}{693} Lb^2\alpha_n^4 D_x + \frac{4}{21} L\alpha_n^2 D_1 + \frac{192}{7} \frac{L}{b^2} D_y + \frac{8}{21} L\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{42} = -\frac{1}{2310} Lb^3\alpha_n^4 D_x - \frac{2}{315} Lb\alpha_n^2 D_1 + \frac{32}{7} \frac{L}{b} D_y - \frac{4}{315} Lb\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{43} = 0$$

$$k_{44} = \frac{16}{3465} Lb^3\alpha_n^4 D_x + \frac{64}{315} Lb\alpha_n^2 D_1 + \frac{128}{7} \frac{L}{b} D_y + \frac{128}{315} Lb\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{51} = \frac{131}{13860} Lb\alpha_n^4 D_x - \frac{11}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_1 - \frac{754}{35} \frac{L}{b^3} D_y - \frac{22}{105} \frac{L}{b} \alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{52} = \frac{29}{27720} Lb^2\alpha_n^4 D_x + \frac{1}{140} L\alpha_n^2 D_1 - \frac{121}{35} \frac{L}{b^2} D_y + \frac{1}{70} L\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{53} = k_{31}$$

$$k_{54} = -k_{41}$$

$$k_{55} = k_{11}$$

$$k_{61} = -k_{52}$$

$$k_{62} = -\frac{1}{9240} Lb^3\alpha_n^4 D_x - \frac{1}{252} Lb\alpha_n^2 D_1 + \frac{19}{35} \frac{L}{b} D_y - \frac{1}{126} Lb\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{63} = -k_{32}$$

$$k_{64} = -\frac{1}{2310} Lb^3\alpha_n^4 D_x - \frac{2}{315} Lb\alpha_n^2 D_1 + \frac{32}{7} \frac{L}{b} D_y - \frac{4}{315} Lb\alpha_n^2 D_{xy}$$

$$k_{65} = -k_{21}$$

$$k_{66} = -k_{22}$$

3. 荷重 vector

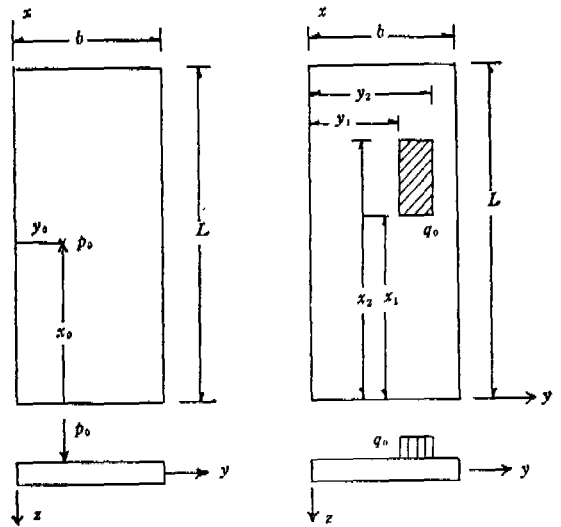


Fig. 3. Concentrated and patch load

Fig. 3과 같이 strip 위의 (x_0, y_0) 에 集中荷重 p_0 가 작용하는 경우 荷重 vector는 式 (18)에 局所座標 (x_0, y_0) 를 直接 代入함으로써 얻어진다. 즉

$$\{F_n^I\} = p_0 [C^I]^T r_{-y_0} \sin \alpha_n x_0 \quad (20)$$

萬一 荷重이 節線 i에 作用하면 더욱 簡單히 되어

$$\{F_n^I\} = p_0 \sin \alpha_n x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

strip의 任意의 位置에 部分分布荷重 q_0 가 作用할 때에는 載荷面積에 걸쳐서 直接 積分하면 얻어진다.

$$\{F_n^I\} = \frac{q_0}{\alpha_n} (\cos \alpha_n x_1 - \cos \alpha_n x_2) [C^I] \quad (22)$$

여기서

$$[\bar{C}^I] = \begin{bmatrix} \bar{y} - \frac{23}{3} \frac{\bar{y}^3}{b^2} + \frac{33}{2} \frac{\bar{y}^4}{b^3} - \frac{68}{5} \frac{\bar{y}^5}{b^4} + 4 \frac{\bar{y}^6}{b^5} \\ \frac{\bar{y}^2}{2} - 2 \frac{\bar{y}^3}{b} + \frac{13}{4} \frac{\bar{y}^4}{b^2} - \frac{12}{5} \frac{\bar{y}^5}{b^3} + \frac{2}{3} \frac{\bar{y}^6}{b^4} \\ \frac{16}{3} \frac{\bar{y}^3}{b^2} - 8 \frac{\bar{y}^4}{b^3} + \frac{16}{5} \frac{\bar{y}^5}{b^4} \\ -\frac{8}{3} \frac{\bar{y}^3}{b} + 8 \frac{\bar{y}^4}{b^2} - \frac{8}{b^3} \bar{y}^5 + \frac{8}{3} \frac{\bar{y}^6}{b^4} \\ \frac{7}{3} \frac{\bar{y}^3}{b^2} - \frac{17}{2} \frac{\bar{y}^4}{b^3} + \frac{52}{5} \frac{\bar{y}^5}{b^4} - \frac{4\bar{y}^6}{b^5} \\ -\frac{\bar{y}^3}{3b} + \frac{5}{4} \frac{\bar{y}^4}{b^2} - \frac{8}{5} \frac{\bar{y}^5}{b^3} + \frac{2}{3} \frac{\bar{y}^6}{b^4} \end{bmatrix}$$

단 $\bar{y}^m = y_2^m - y_1^m$

또 strip全體에 걸쳐서 等分布荷重이 作用하면

$$\{F_n^I\} = \frac{q_0}{\alpha_n} [1 - (-1)^n] \begin{bmatrix} 7b/30 \\ b^2/60 \\ 8b/15 \\ 0 \\ 7b/30 \\ -b^2/60 \end{bmatrix} \quad (23)$$

같은 strip에 여러 種類의 荷重이 作用한다 해도 그 效果를 重疊하기만 하면 된다.

4. 比較

3次多項式과 5次多項式을 서로 比較하기 爲하여

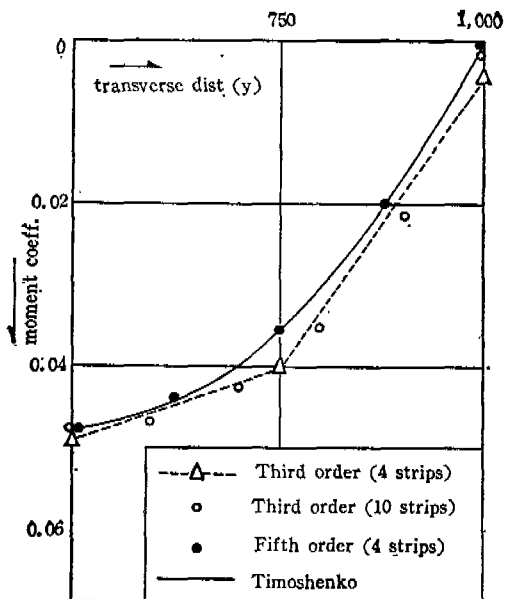


Fig. 4. Mid-span transverse moment distribution

等分布荷重을 받는 四邊 單純支持의 矩形板을 解析했다. Fig. 4에서와 같이 4個의 strip으로 나뉘었을 때 3次多項式의 경우 兩側 節線에서 M_y 가 0가 되지 못하고 $M_{y,max}$ 도 약간 큰 값을 나타냈다. 10個以上の strip으로 나뉠 때 비로소 4個 strip으로 分割한 5次多項式의 경우와 類似해지나 各點의 M_y 가 약간씩 크게 나옴을 알 수 있다.

Ⅱ. 結 論

計算例에서 보는 바와 같이 적은 數의 strip만으로 板의 처짐, 變位角, 曲率의 連續性을 유지하기 위하여는 적어도 5次多項式을 가지는 變位函數를 擇하는 것이 좋겠다.

또 荷重 vector를 求하는 데도 直接 積分하는 것이 實際 載荷狀態를 正確히 나타낼 수 있으므로 좋은 方法이라 할 수 있다.

參 考 文 獻

1. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S.; "Theory of plates and shells" pp. 105~179. 2nd ed. McGraw-Hill (1959)
2. Cheung, Y. K.; "Analysis of Box-Girder Bridges by the Finite strip Method" pp. 357~378. 2nd Int. Sym. on Concrete Bridge Design, Chicago. (1968)
3. Cheung, Y. K.; "The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends" pp. 1~7. Proc. Instn. civ. Engrs. Vol. 40. (1968)
4. Cheung, Y. K.; "Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs" pp. 1365~1378. ASCE Vol. 94 EM6 (1968)
5. Powell, G. H. and Ogden, D. W.; "Analysis of orthotropic bridge decks" pp. 909. ASCE vol. 95 ST5 (1969)
6. Cheung, Y. K.; "Folded Plate Structures by Finite Strip Method" pp. 2963~2979. ASCE vol. 95, ST12 (1969)
7. Cheung, Y. K.; "The Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks" pp. 41~52. Publications, IABSE Vol. 29-II (1969)

8. Cheung, M.S. Cheung, Y.K. and Ghali, A.; "Analysis of Slab and Girder Bridges by the Finite Strip Method" pp.95~104, Building Science vol.5 (1970)
9. Meyer, C. and Scordelis, A. C.; "Analysis of curved folded plate structures" pp.2459~2480. ASCE vol.97 ST10. (1971)
10. Loo, Y-C, and Cusens, A.R.; "A refined finite strip method for the analysis of orthotropic plates" pp.85~91. proc, ICE vol. 48. (1971)
11. Cheung, M.S. and Cheung, Y.K.; "Analysis of curved box-girder bridges by finite strip method" pp.1~19. publ. IABSE; vol.31 - I (1971)
12. Loo, Y-C and Cusens, A.R. "Developments of the finite strip method in the analysis of bridge decks" pp. 53-72 proc. confce. on Developments in Bridge Design and Construction, Cardiff (1971)
13. Zienkiewicz, O. C. "The Finite Element Method" pp. 148-328 3rd ed. McGraw-Hill (1977)