

압축성 오일러 방정식을 이용한 익형의 형상 설계최적화

조창열
항공우주공학과

<요약>

오일러 방정식에 근거한 천음속 영역에서 익형의 형상설계를 위한 수치최적화 과정을 정립하였다. 여기에는 설계진행에 따라 반복적으로 설계공간을 국부적으로 제한하고 이 공간 내에서 목적함수와 제약조건을 근사하여 최적화를 수행하는 순차근사최적화기법과, 목적함수와 제약조건의 근사를 위해 좌표변형에 근거한 중간매개변수의 민감도를 이용하는 방법, 그리고 반복적 오일러 유동해석의 효율화를 위하여 표면 경계조건의 개조 등을 채택하여 전체 계산시간을 실제 설계에도 충분히 적용 가능할 만큼 감소시켰다. 근사최적화의 진행 시에는 이동한계를 설계변수 절대값으로 지정 적용하는 방법이 오일러 유동방정식을 이용한 근사 설계최적화 문제에서 가장 효율적인 것으로 판명되었다.

Airfoil Shape Optimization Technique based on the Euler Equations

Joh, Chang Yeol
Dept. of Aerospace Engineering

<Abstract>

Numerical optimization procedures were tested for the design of airfoil shapes in transonic flow based on the Euler equations. Specific techniques such as sequential approximation optimization, sensitivity calculations of the intermediate parameter using coordinate straining and modification of Euler surface boundary conditions were implemented in the procedures to reduce computational burden. Optimization with large

move limits specified in absolute values of the design variables was found to be efficient and robust in solving the approximate optimization problem based on the Euler equations.

기 호

- C_l : 양력계수(lift coefficient)
- C_d : 항력계수(drag coefficient)
- A : 무차원 날개꼴 단면적(단면적/chord²)
- Y : 설계 날개꼴
- X_i : i 번째 설계변수(design variable)
- Y_i : i 번째 꼴함수(shape function)
- x, y : 날개꼴의 x, y 좌표
- c : 시위(chord)
- p : 압력(pressure)
- Δx : x-좌표 변형량
- $s(x)$: 좌표변형함수(coordinate straining function)
- x_s : 충격파의 위치
- V : 공기흐름속도
- Y' : 날개꼴 함수의 미분

하첨자/상첨자

- i : i 번째
- n : 수직성분(normal component)
- t : 접선성분(tangential component)
- b : 기본설계(base design)
- o : 기준설계(norminal design)
- p : 교란설계(perturbed design)

1. 개 요

현재 CFD를 응용한 공력설계에는 역설계법(inverse design)과 수치최적화법(numerical optimization)이 널리 사용되고 있다. 본 연구는 이 중에서 역설계법에 비해 계산시간은 많이 소요되나 자동화된 설계능력 및 다중설계점(multi-point), 다중학제(multi-disciplinary) 설계능력 등의 장점을 지닌 수치최적화법에 대하여, 유동해석을 위해 오일러 방정식을 적용한 결과이다.

수치최적화 기법을 CFD기법과 결합하여 유체흐름 속에 놓여 있는 물체의 형상을 전산해석을 통해 설계최적화하는 데에는 수치최적화 코드와 CFD 코드자체의 선정은 제외하더라도 실제적으로 많은 문제가 발생한다. 우선 가장 큰 문제로서, 범용 수치최적화 코드는 최적화과정 중 각기 다른 설계변수에 따라 목적함수와 제약조건의 값을 수백 또는 수천번 요구하기 때문에, 이들을 그때마다 직접 CFD 코드로부터 그 값을 제공하기에는 계산량이 현재의 초고속컴퓨터(super-computer)의 능력으로도 극히 어렵다. 그러므로 일반적으로는 몇 번의 목적함수와 제약조건에 대한 계산값들을 이용하여 그 설계공간 근처에서 목적함수와 제약조건에 대한 근사식을 구성하여 최적화를 수행하는 근사설계최적화(approximate design optimization)기법을 많이 사용한다. 참고로 최근에 많이 시도되고 있는 진화이론[1]의 경우는 이와 같은 민감도(sensitivity)를 기본으로 하는 기법이 아니기 때문에 근사설계최적화기법으로는 계산시간을 감소시킬 수 없는 단점이 있다.

다음으로 설계변수(design variables)와 꼴함수(shape function)의 선정에서는, 가능한 많은 형태를 표현할 수 있는 능력과 최적화 소요시간이 서로 상반되게 비례하므로, 이에 대한 사전 타협연구(trade study)가 있어야 한다. 본 연구에서는 1차연구[2]와의 비교를 목적으로 하였기 때문에 동일한 설계변수를 사용하였다.

또한 목적함수와 제약조건을 선정된 설계변수에 대한 민감도를 이용하여 근사하는 방법 자체의 선정도 상당히 중요하다. 왜냐하면 실제 최적화 수행 시에는 근사값의 정확성이 큰 문제가 되는데, 즉 가능한 넓은 설계공간에서 정확한 근사가 되어야만 설계가 빨리 진행함과 동시에 근사값의 오차로 인해 설계반복시 설계방향의 선택에 혼란을 없앨 수 있기 때문이다.

마지막으로 이와 같은 여러 기법들을 혼합하여 근사설계최적화를 수행하더라도, 설계공간 자체가 원만(smooth)하지 못하고 소음(noise)등으로 인해 많은 국부최적해(local optima)를 가지고 있는 경우가 많기 때문에 이와 같은 문제를 극복하기 위해서는 근사최적화 실행기법 특히 이동한계(move limits)의 설정방법이 중요하며, 때로는 수치최적화 알고리즘 자체의 선정도 영향을 준다.

이와 같은 여러 문제들은 이미 1차연구에서 실험한 바 있으며, 본 연구에서는 그때 선정된 여러 기법들을 그대로 사용하되, 다만 유동해석방법을 천음속 미소교란(TSD :transonic small disturbance)으로부터 오일러(Euler)방정식으로 바꾸어 회전류효과(rotational effect)를 포함한 강한 충격파 영향도 해석할 수 있도록 하였다. 그리하여 보다 정확하고 실제에 가까운 유동해석을 사용했을 경우 최종설계에 미치는 영향을 살펴보는데 연구의 목적이 있다. 아울러 1차연구 발표후, 전체최적해(global optimum)를 찾아가는데 심하게 방해가 되었던 설계공간상의 소음은 꼴함수의 보간이 원만하지 못하여 발생하였던 것으로 일부 판명됨에 따라 이에 대한 개선도 이루어져 새로운 익형 보간법을 사용, 본 연구에 적용하였다.

역설계법에는 오일러 해석[3], Navier-Stokes 해석[4] 등이 많이 사용되고 있으나, 수치최적화법에는 많은 계산시간으로 인해 아직은 이들의 방정식 사용이 흔치 않다.

2. 설계 수식화

2.1 설계문제

설계문제는 다음과 같이 웨이브항력(wave drag)과 날개꼴(익형)의 단면적에 대한 제약 조건을 가진 양력최대화 문제이다.

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && C_l(\bar{X}) \\ & \text{such that} && C_d(\bar{X}) \leq 0.01 \\ & && A(\bar{X}) \geq 0.075 \end{aligned}$$

2.2 꼴함수(shape function)와 설계변수

날개꼴을 꼴함수의 가중선형중첩으로 표시한다.

$$Y = \sum_1^6 X_i Y_i(\frac{x}{c})$$

여기서, Y 는 설계된 날개꼴의 좌표로서, $Y = y/c$ 로 표시되고, X_i, Y_i 는 설계변수 및 꼴함수를 각각 나타낸다. 이때 꼴함수는 Y_1 (NACA 2412), Y_2 (NACA 64₁-412), Y_3 (NACA 65₂-415), Y_4 (NACA 64₂A215), $Y_5(x/c : 윗면, 0 : 아래면)$, $Y_6(0 : 윗면, -x/c : 아래면)$ 등의 현존하는 임의의 날개꼴들이고(그림1), Y_5 와 Y_6 는 뒷전에서의 두께 경계조건을 적용하기 위해 채택하였다. 뒷전 두께가 0이 되어야 한다는 경계조건으로부터 X_5, X_6 를 구할 수 있으므로 실제 최적화과정 중에는 $X_1 \sim X_4$ 의 4개 설계변수만 사용된다.

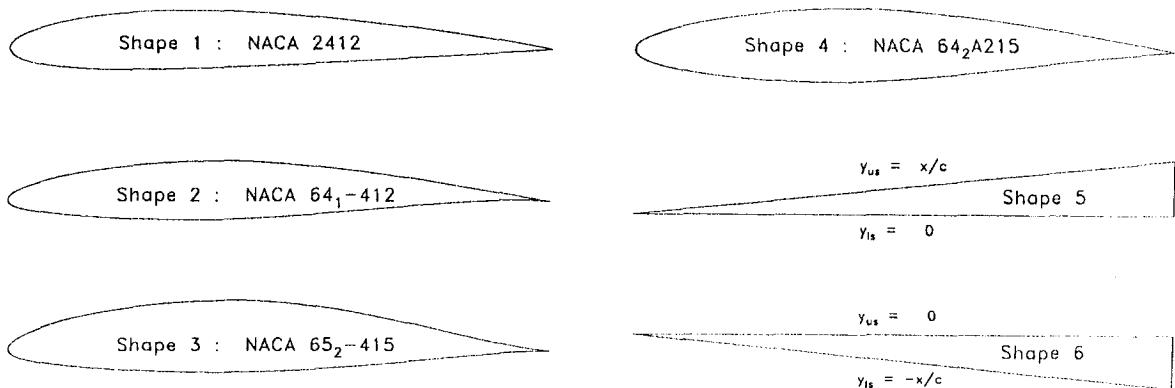


그림 1. 6개의 꼴함수(shape functions)

2.3 유체해석 코드 및 최적화 알고리즘

천음속 유동을 해석하기 위해 사용한 코드는 FLO-53[5]으로서, Jameson 형태의 4차 Runge-Kutta 시간적분법을 사용하였고, 보존성이 뛰어난 셀중심 유한체적법(cell-centered Finite Volume Method)과 2차의 중앙차분법(central difference)을 공간이산화(spatial descretization)에 채택하였고, 해의 안정성을 위해 인공점성항(artificial viscosity)을 추가하였다. 수렴성을 증진시키기 위하여 다중격자(multigrid)를 채택하였고, 국부시간간격(local time step) 및 총엔탈피 감쇄(total enthalpy damping)등의 여러 기법들이 사용된 오일러해석 코드이다. 계산에 사용한 격자는 C-형태의 쌍곡선형 격자(hyperbolic grid)로서, 외부경계에 제한이 없기 때문에 직교성(orthogonality)과 원만성(smoothness)등이 특히 뛰어난다. 격자의 크기는 224×32 이며(그림 2), 외부 경계조건은 먼거리(far-field)를 특히 잘 묘사하는 특성경계조건(characteristics-based boundary conditions)을 사용하였다.

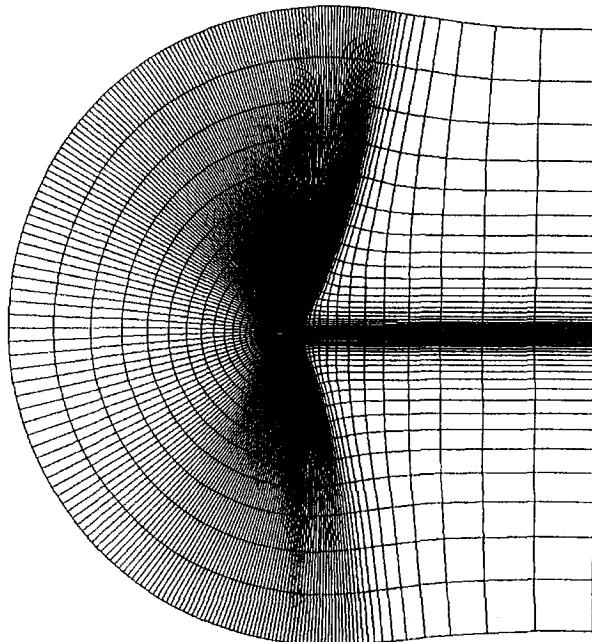


그림 2. C 형태의 쌍곡선형 격자(hyperbolic grid, 224×32)

최적화 알고리즘은 범용 최적화 프로그램인 NEWSUMT-A[6]로서, 제약조건을 가진 최소화문제(constrained minimization)를 무제약최소화문제(unconstrained minimization problem)로 바꾸기 위해 2차확장 내부별칙함수(quadratic extended interior penalty function)를 사용하고, 무제약 최소화(unconstrained minimization) 위해서는 Newton법을 사용하고 있다. 이는 원 프로그램인 NEWSUMT에 제약조건의 균사기능과 이동한계 적용기법을 추가하여 수렴성을 증진시킨 최적화 코드이다.

2.4 근사 최적화

수치최적화 전 과정에서 유동해석 코드를 사용하여 목적함수와 제약조건을 직접 구하는 대신에, 설계 초기점에서 민감도(sensitivity)를 구할 때만 사용하고 이를 이용하여 형성한 목적함수와 제약조건의 직간접 근사식에 설계 이동한계(move limits)를 포함시켜 구성된 근사최적화 문제를 해석함으로써, 실제 설계최적화에 적용 시에도 계산시간을 현재의 전산기를 사용할 수 있는 범위 내로 감소시키도록 하였다. 이와 같은 접근법을 순차근사 최적화법(sequential approximation optimization)이라 한다.

2.4.1 목적함수/제약조건 의 근사

천음속 유동영역은 비선형 특성을 가지고 있으므로 목적함수(양력계수, C_l)나 제약조건(wave항력계수, C_d)을 직접 선형근사하는 것은 근사최적화와 결합시키기에 정확도가 매우 부족하므로[2], 중간 매개변수(intermediate parameter)인 유동장의 해를 근사하여 이를 이용 C_l , C_d 를 구함으로써 이를 극복한다. [2]에서의 천음속 미소교란(TSD : Transonic Small Disturbances)해석과는 달리 오일러 방정식을 사용할 때에는 전 유동장을 근사할 필요 없이 다음과 같이 물체 표면에서의 압력만을 선형근사한다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial X_i}[x, Y_0(x)] &= -\frac{1}{\Delta X_i} (p[x+\Delta x, Y_0(x+\Delta x)] - p^0[x, Y_0(x)]) \\ p[x+\Delta x, Y_0(x+\Delta x)] &= p^0[x, Y_0(x)] + \sum_1^4 \frac{\partial p[x, Y_0(x)]}{\partial X_i} (X_i - X_i^0)\end{aligned}$$

민감도 계산시 충격파의 위치를 합치시키기 위해서 Nixon의 좌표변형법 (coordinate straining)[7]을 사용하며, 교란에 의한 충격파의 위치변화는 선형근사법을 사용한다. 이때 사용된 좌표 변형함수는 포텐셜 흐름에서도 그 정확성이 입증된 선형부분구간 연속함수(linear piecewise continuous function)를 사용한다.

$$s(x) = \begin{cases} x/x_s & : 0 \leq x < x_s \\ (c-x)/(c-x_s) & : x_s \leq x \leq c \end{cases}$$

그림 3은 이상의 방법을 사용하여 표면의 압력을 근사한 결과를 나타내고 있다. 여기서 기본해(base solution)는 임의로 선택한 기준설계, $\bar{X} = (0.5, 0.5, -0.5, 0.5)$,에 대해 직접 오일러코드를 사용해서 구한 수치해이고, 근사해(approximation)는 기본설계를 약간 교란하여 얻은 설계, $\bar{X} = (0.51, 0.51, -0.49, 0.51)$,에 대해 좌표변형법을 사용하여 근사적으로 구한 해이며, 완전해(exact solution)는 동일 교란설계에 대해 오일러코드를 직접 사용하여 구한 수치해를 각각 나타낸다. 근사값과 실제가 서로 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

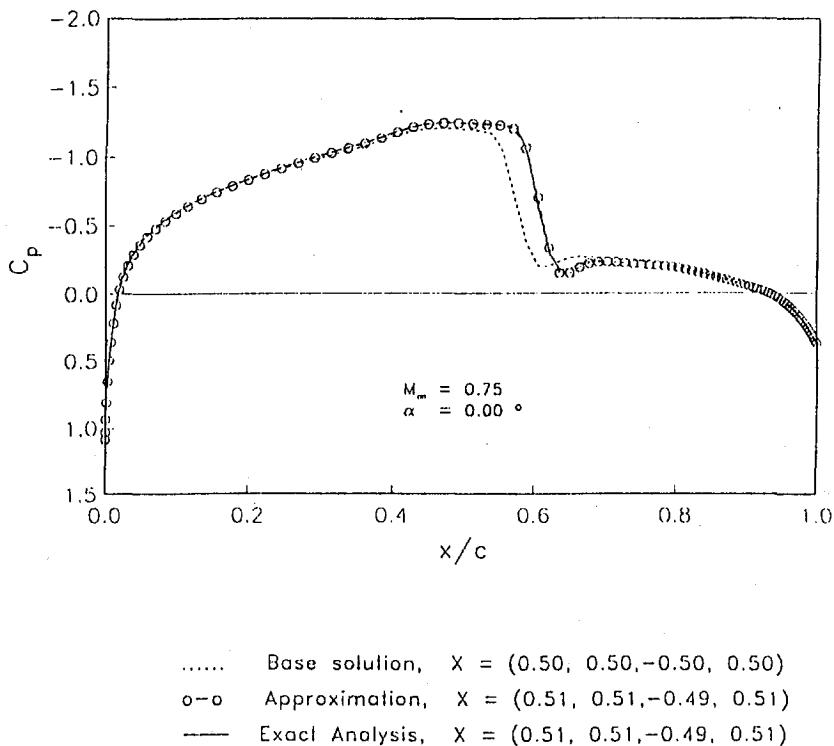


그림 3. 좌표변형을 이용한 선형 압력근사

2.4.2 경계조건의 변형

기준설계점(nominal design)에서 민감도를 계산하기 위하여 각 설계변수를 미소 교란시켜 유동해석 코드로 해를 구할 때, 이 교란된 물체에 대해 새로운 격자를 형성하는 대신에 형체의 교란을 물체표면에서의 질량분출(mass transpiration)로 대체하면 기준설계격자를 그대로 사용할 수 있으므로 격자생성의 번거러움을 덜 수 있다. 이때 질량분출은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{n_b} = \frac{V_{t_b}}{1 + Y'_b Y'_p} (Y'_p - Y'_b)$$

참고로 천음속미소교란코드를 사용할 때에는 물체의 두께가 0 이므로 사용되는 격자계는 직교격자(cartesian grid)이다. 이때는 초기설계시 한번 생성한 격자는 설계과정중 날개꼴의 형태가 바뀌더라도 격자는 바뀌지 않으므로 이와 같은 번거러운 작업이 필요 없다는 장점이 있다.

3. 설계 결과

앞선 연구[2]에서 천음속 미소교란 방정식으로 근사최적화를 수행할 때 3가지 방법을 사용하였는데, 이들은 각각 작은 % 이동한계를 사용한 근사최적화, 항력최소화후 양력 최대화, 큰 절대치 이동한계를 사용한 근사최적화 등이다. 오일러 방정식을 사용한 본 연구에서도 이들을 모두 시험해 보았으며 [2]에서와 동일한 결과를 얻었다. 즉 첫 번째 방법은 순조로우나 수렴이 늦었고, 두 번째와 세 번째 방법은 최적화의 수렴성과 강건성이 뛰어남을 볼 수 있었다.

그러나 앞선 연구에서 천음속 미소교란해석을 사용하였을 때에는 웨이브항력에 발생한 소음으로 인해 최적화함수의 행적(behavior) 또한 원만하지 못한 불규칙함수로 되어서 전체최적해(global optimum)를 구하는 데 상당히 어려움을 겪었으며, 이를 적절히 극복하는 방법으로써 두번째 방법을 제안하여 성공적으로 사용하였다. 그러나 오일러해석을 사용한 본 연구에서는 수치해의 수렴성도 좋고 또한 앞선 연구[2]에서 소음의 원인의 일부가 되었던 꼴함수 보간방법을 개선하여 보다 원만한 형상을 생성할 수 있음에 따라 소음이 많이 제거되었다. 이로 인해 국부최적해를 극복하고 전체최적해를 구하기 위해 제안되었던 두번째 방법은 물론 오일러 해석을 사용한 본 연구에서도 잘 작용하고 있기는 하지만, 세번째 방법 또한 잘 작용하고 있으며 사실은 이 방법이 보다 일반적이고 정상적이므로, 두번째와 같이 특별한 경우를 위해 개발된 방법을 사용할 필요성이 약함을 알 수 있었다.

표 1은 세 번째 방법을 사용했을 경우 각기 다른 4가지 초기설계 조건에 대한 설계 최적화된 결과를 보여주고 있다. 모두 거의 비슷하게 8~10 설계반복(design iterations)정도에서 동일한 설계점으로 수렴하고 있으므로 오일러 방정식을 사용해도 본 최적화 과정은 여전히 효율적이며 강건함을 알 수 있다.

표 1. 설계최적화 결과

case	설계변수(design variables)				C_l	C_d	A	설계 반복수
	X_1	X_2	X_3	X_4				
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.4891	0.0118	0.0810	9
	-0.605	2.159	-1.722	1.288	0.7051	0.0101	0.0750	
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.6977	0.0266	0.0759	8
	-0.636	2.194	-1.759	1.323	0.7055	0.0101	0.0750	
3	0.0	0.0	1.0	0.0	0.5050	0.0467	0.0967	10
	-0.650	2.208	-1.744	1.339	0.7049	0.0100	0.0750	
4	0.0	0.0	0.0	1.0	0.3558	0.0165	0.0984	9
	-0.664	2.255	-1.833	1.372	0.7090	0.0101	0.0750	

그림 4는 초기설계점과 설계 최적화된 결과의 형상 및 공력특성을 보여 주고 있으며, [2]에서와 마찬가지로 재래식 아음속 날개꼴로부터 초임계 날개꼴(supercritical airfoil)이 자동적으로 생성되고 있음을 볼 수 있다.

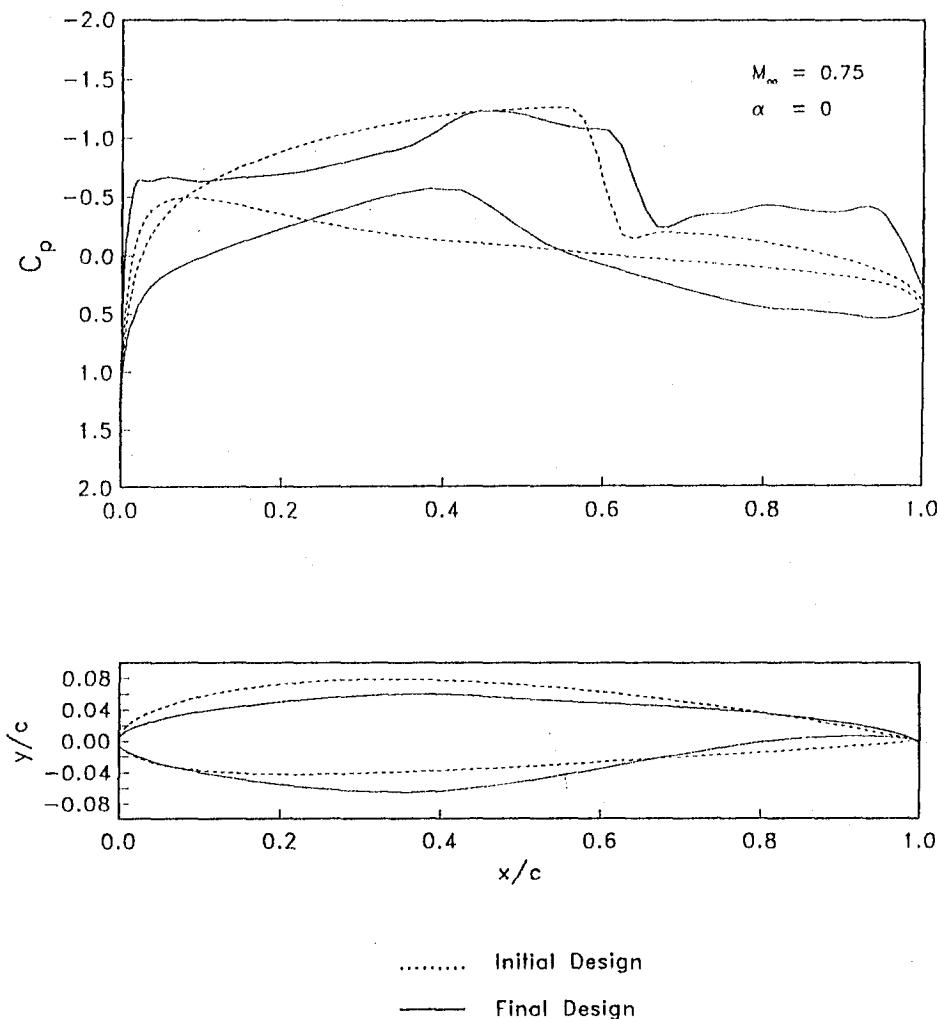


그림 4. 설계최적화 결과 비교

그림 5는 case 1 최적화의 수렴과정을 보여주고 있다.

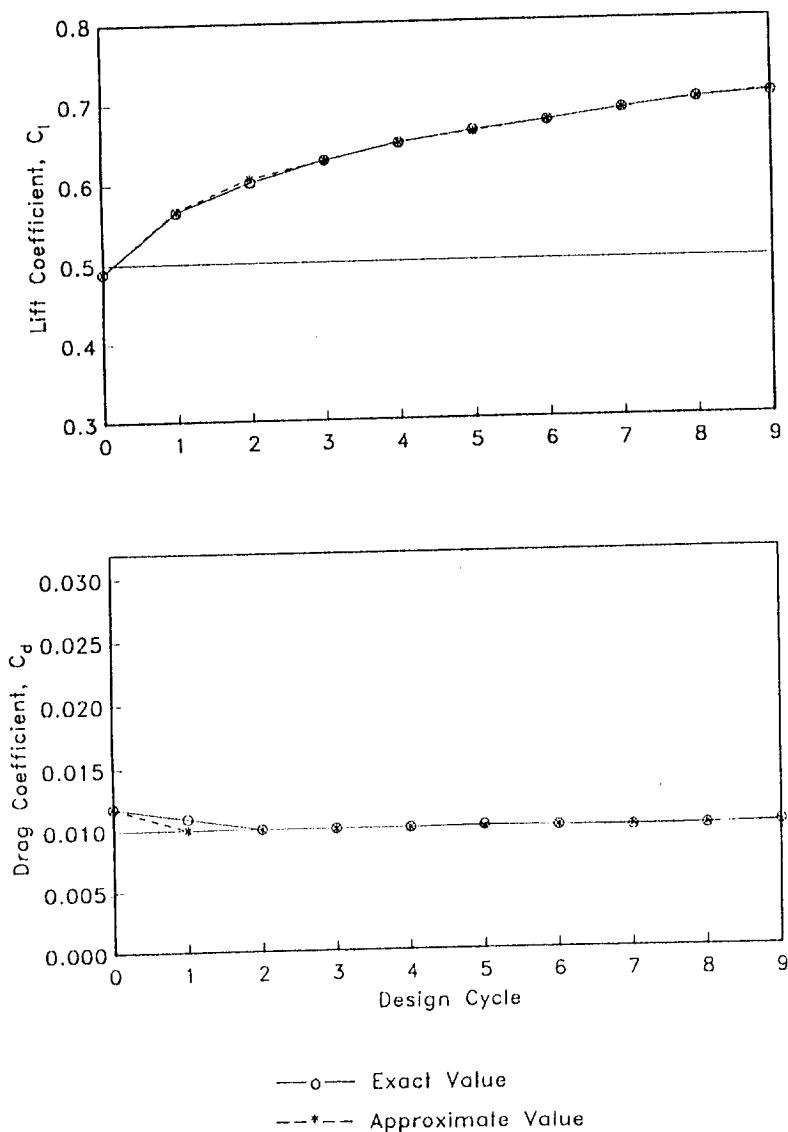


그림 5. 설계최적화 수렴과정

표 2는 동일한 날개꼴에 대해 서로 다른 유동해석 방법을 사용했을 경우 그 결과를 비교한 것이다. 초기설계에 비해 최적화된 날개꼴에 대해 두 방법 사이의 격차가 커짐을 알 수 있다. 즉 초기설계(airfoil 1~4)에서는 날개꼴의 성능이라고 볼 수 있는 양항비(C_l/C_d)가 두 유동해석 방법간에 서로 비슷하였으나 최적화가 완료된 형상에 대해서는 차이가 상

당히 벌어지게 된다. 이는 비점성 유체의 관점에서 보면 오일러해석이 천음속미소교란보다 정확하므로 오일러해석 결과가 더 정확하며 실제에 접근하는 것이라고 볼 수 있다. 즉 실제로는 미소교란해석이 예측하는 만큼의 그렇게 큰 이득을 얻을 수 없다는 것을 알 수 있다. 또한 만일 부정확한 해석방법을 사용하여 설계최적화를 진행할 경우에는 최적화에 의해 그 부정확한 해석방법의 약점을 이용하는 방향으로 설계가 진행될 수도 있는 위험도 있음을 보여주는 것이라 하겠다.

표 2. 최적화과정 중의 오차증폭

날개꼴(airfoils)	C_l/C_d	
	TSD 해석	Euler 해석
airfoil 1	54.9	41.4
airfoil 2	23.3	26.2
airfoil 3	21.9	23.9
airfoil 4	22.9	21.6
airfoil optimized, TSD	171.0	83.4

4. 결 론

오일러방정식을 사용한 유체해석 방법을 수치최적화 알고리즘과 결합하여 천음속 유동 영역에서 형상설계 최적화를 시도하였다. 본 연구의 결과로서, 순차근사최적화기법, 좌표 변형을 통한 해의 선형근사 및 절대값을 이용한 이동한계 등의 조합은, 오일러방정식에 근거한 비선형 유동영역에서도 상당히 효율적이며 강건한 설계최적화 기법을 구성함을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] Gregg, R. T. and Misegades, K. P., "Transonic Wing Optimization Using Evolution Theory," AIAA Paper No. 87-0520, Jan. 1987.
- [2] 조창열, "천음속 날개꼴의 효율적인 설계최적화," *한국항공우주학회*, 제20권 제2호, pp. 14-22, 1992.
- [3] Giles, M., Drela, M. and Tompkins, W. T. Jr., "Newton Solution of Direct and Inverse Transonic Euler Equation," AIAA Paper No. 85-1530, 1985
- [4] Malone, J. B., Narramore, J. C. and Sankar, L. N., "An Efficient Airfoil Design Method using The Navier-Stokes Equation," Computational Methods for Aerodynamic Design (Inverse) and Optimization," AGARD CP-463, 5.1-5.18, 1990
- [5] Jameson, A., "Solution of the Euler Equations for Two-Dimensional Transonic Flow by a Multigrid Method," *Applied Mathematics and Computation*, Vol 13, pp. 327-335, 1983

- [6] Grandhi, R. V., Thareja, R. and Haftka, R. T., "NEWSUMT-A : A General Purpose Program for Constrained Optimization using Constraint Approximation," **ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design**, Vol 107, pp. 94-99, 1985
- [7] Nixon, D., "Perturbation of a Discontinuous Transonic Flow," **AIAA Journal**, Vol. 16, No. 1, pp. 47-52, 1978