UOU Report Vol. 16. No. 2. pp. 405~413. 1985 연구논문집 제16권 제 2 호 pp. 405~413. 1985

設備數의 制限을 갖는 設備立地選定問題의 解法에 관한 硏究

이 영 덕
경 영 학 과
(1985. 4. 29 접수)

〈요 약〉

設備數의 제약을 갖는 설비입지선정 문제(p-median 문제)는 문제의 크기가 큰 I·P 문제이다. 특히 $x_{ij} \leq y_i$ 와 같은 제약식(VUB 제약식)으로 문제를 모형화하면 문제의 크기는 더욱 더 커지는데 반면에 이 VUB의 특성 때문에 L·P의 해가 대개 I·P의 해가 된다. 따라서 이 VUB의 특성을 잘 살려 문제를 간단하게 할 수 있으면 VUB 제약식이 효율적일 수 있다. 본 논문에서는 修正單體法을 이용하여 이 문제의 해법을 연구하였는데 VUB의 특성을 이용하여 逆行列을 쉽게 구할 수 있게 하였고 修正單體法의 과정도 쉽게 구할 수 있게 하였다.

An Efficient VUB-Based Algorithm for the p-Median Warehouse Location Problem

Lee Young-Duk
Department of Management
(Received April 29, 1985)

〈**Abstract**〉

The p-median warehouse location problem is very intersting part of Integer Programming. In this paper, we developed an algorithm for the p-median problem. In special form of p-median problem, large numbers of VUB constraints, which are tight constraints of the p-median problem, are appeared. In revised simplex method for the p-median problem, the inverse matrix of basis and the procedure of the revised simplex method can be simplified by use of the VUB's characteristics.

I. 序 論

생산시스템의 立地選定에는 여러가지 요인[1]을 고려하여야 하는데 經營科學에서의 관심은 설비설치에 따르는 고정비용과 이 설비에서 수요지로의 輸送費에 관심이 모아지게 되어 설비설치에 따르는 고정비용과 수송비의 합을 最小化하는데 목적이 두어지게 된다. 그리고 이러한 목적하에서도 여러가지 각도[2]에서 연구가 이루어지는데 그중 意思決定者가 여러가지 사정에 의하여 설비설치숫자의 상한치를 제한하는 경우가 있는데 이 때는 설비설치수를 고려하여야 하며 이 경우를 p-median 문제라고 부르고 있다.[3] p-median 문제

(1) 자연적요인, 사회적요인, 경제적요인
(2) 설비능력의 한계여부, 유통단계, 유통품목, 고려되는 시간 등
(3) 설비의 갯수가 제한 되어 있지 않은 경우는 p-median의 P를 설비후보지의 수로 놓으면 된다. 따라서 p-median 문제는 설비 갯수의 제한이 없는 문제를 포함하게 된다.

는 1970년대에 들어와서 많은 연구가 이루어지고 있는데 연구순서별로 보면 JÄRVINEN외 2인 [3], GARFINKEL외 2인[2], NARULA[5]등이 연구하였으며 최근에는 GALVÃO[1]가 雙對구조를 이용하여 p-median 문제를 연구하였다. 본 연구에서는 설비입지문제의 특수한 형태인 이 p-median 문제를 다루게 되는데 이 p-median 문제의 특수한 형태를 이용하여 修正單體法(revised simplex method)으로 이 문제의 解法을 연구하였다.

Ⅱ. 模型의 設定

본 연구에서는 설비의 최대설치 숫자가 제한 되어있는 경우에 輸送費와 固定費의 총합을을 최소화하는 설비위치를 찾게 되는데 이를 위하여 필요한 假定과 이러한 가정하에 세워진 模型은 다음과 같다.

1. 模型設定의 假定

模型設定에 필요한 가정은 다음과 같다.

假定：1. 設備의 能力은 제한이 없다.

2. 設備候補地는 미리 구해져 있으며, 이 후보지에 설비를 설치운영하는 固定費用은 정해져 있다.
3. 설비에서 수요지까지의 수송비는 정해져 있다.
4. 설비의 최대설치 숫자는 p개이다.

2. 數式化된 模型

위와 같은 假定下에서 p-median 설비배치 문제의 數理的 模型은 다음과 같다.

$$(p\text{-}1)\ \text{Min} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} C_{ij}\cdot X_{ij} + \sum_{i\in I} F_i\cdot Y_i \qquad ①$$

$$\text{s.t} \sum_{i\in I} X_{ij}=1,\ j\in J \qquad ②$$

$$\sum_{i\in I} Y_i \le P \qquad ③$$

$$X_{ij}\le Y_i,\ i\in I,\ j\in J \qquad ④$$

$$X_{ij}\ge 0,\ i\in I,\ j\in J$$

$$Y_i\in\{0,\ 1\},\ i\in I$$

여기에서

$I=\{1, 2, \cdots, m\}$ 設備設定 候補地의 集合.

$J=\{1, 2, \cdots, n\}$ 需要地의 集合.

C_{ij}; 공급지 i에서 수요지 j로 수요지 j의 全需要量을 수송하는데 드는 수송비용.

X_{ij}; 공급지 i에서 수요지 j로 공급하는 부분,

$$\text{즉 } x_{ij}=\frac{\text{공급지 } i \text{에서 수요지 } j \text{로 공급하는 공급량}}{\text{수요지 } j \text{의 수요량}}.$$

F_i; 후보지 i에 설비를 설치 운영하는데 드는 비용.

$$Y_i=\begin{cases}1, & \text{후보지 } i \text{에 설비를 설치할때}\\ 0, & \text{아닐때}\end{cases}$$

P; 설비설치數의 상한

①식은 목적함수로서 수송비의 총합과 고정비의 총합을 최소화하자는 것을 나타내며 ②식은 모든 수요지 j는 수요량을 전부 공급받아야 한다는 것을 나타내며 ③식은 설비설치 수의 상한을 나타내고 ④식에서는 $X_{ij}\le Y_i$이므로 Y_i가 0일 경우는 X_{ij}가 0이 되게 되며 이것은 후보지 i에 설비가 설치되지 않을 경우는 수요지 j로 공급이 되지 못하게 하여($X_{ij}=0$) 설치된 설비 i에서만 공급을 하게하는 제약조건이 된다. 그런데 이때 ④식은 $\sum_{j\in J} X_{ij}\le n_i\cdot Y_j$, $i\in I$ (n_i; 설비 i에서 공급받는 수요지의 數)로 나타내지 기도 하는데 이 두가지의 특성은 다음과 같다.

1) $\sum_{j\in J} \leq n_i \cdot Y_i$로 표시될 때

이때는 이 제약식의 수는 m개가 되므로 원문제의 총제약식의 수는 $(n+m+1)$개가 되어 제약식의 수는 적어지게 되는데 ④식에 비해서는 느슨한 제약식이 된다.

2) $X_{ij} \leq Y_i$로 표시될 때

이때는 제약식의 수가 $m \times n$개가 되어 총제약식은 $(m \times n+n+1)$개가 되며 설비 후보지가 10개, 수요지가 20개라 가정하면 1)로 표시하면 제약식이 31개인 반면 2)로 표시하였을 때는 221개로 그 수는 기하급수적으로 늘게되어 문제의 크기는 훨씬 커진다. 반면에 이 제약식은 1)식에 비해 훨씬 강력한 제약식이 되어 함축적으로 Y_i가 0나 1이 되게하여 대개의 경우 L·P의 해가 곧바로 整數解가 되게 한다.

따라서 $X_{ij} \leq Y_i$(4)와 같은 제약식의 특성을 잘 연구하여 이 제약식의 처리를 효율적으로 할 수 있으면[6] 수리적 모형(p-1)은 효율적인 모형이 될 수 있고 (p-1)에서의 L·P의 해가 바로 整數解로 나타나게 된다. 문제 (p-1)에서 餘裕變數(slack variable)와 人爲變數(Artificial Variable)를 도입하여 모형을 정리하면 모형(p-1)은 그림 1과 같은 모습을 갖는다. 이때 이 모형에서는 X_{ij}, Y_i, A_j, S_{ij}, S_p등의 5가지 종류의 변수가 있게 되는데 이와 같은 여러 종류의 변수들은 앞으로의 해법전개에 어려움을 주므로 이 모형을 다음의 (p-2)로 표시하기로 한다.(5) 그리고 (p-1)이나 (p-2) 모든 모형에서 밑의 $m \cdot n$개의 제약식은 VUB로서 이 VUB는 여러 성질을 내포하고 있는데 이列을 含縮列(implicit row)이라 부르고 나머지 列은 明示列(explicit row)이라 부르기로 한다.

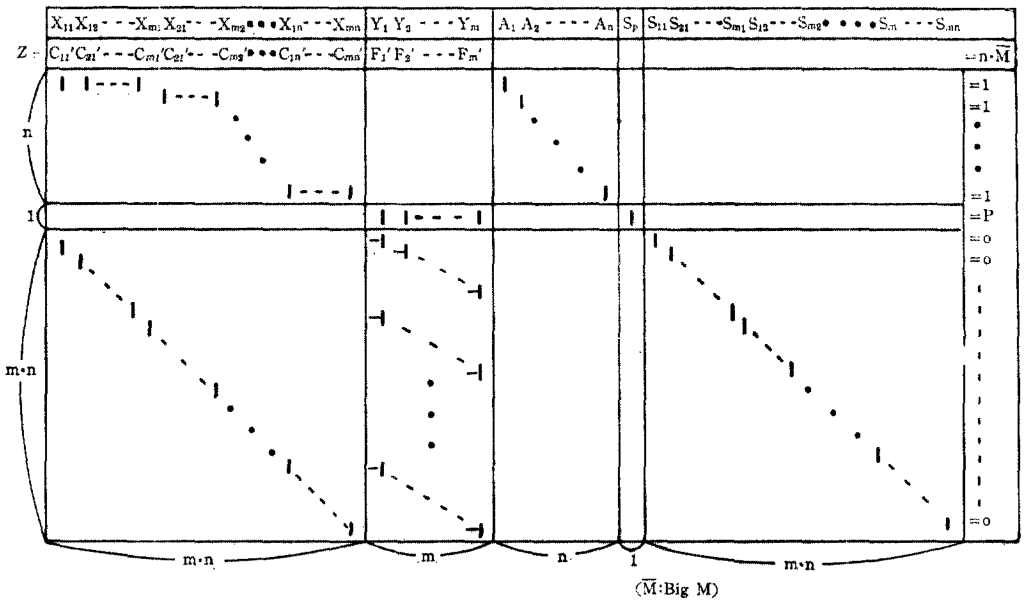


그림 1

$$(p-2) \quad \text{Min } Z = \sum_{j\in N} p_j \cdot x_j$$

$$\text{sit } \sum_{j\in N} a_{ij} \cdot x = b_i, \quad i \in M$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in N$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in \{m \cdot n+1, \cdots, m \cdot n+m\}$$

(4) 이와 같이 변수(X_{ij})가 또 다른 변수(Y_{ij})의 제약을 받을 때 이것은 變數制約式(Variable Upper Bound: 줄여서 VUB)이라 부른다.

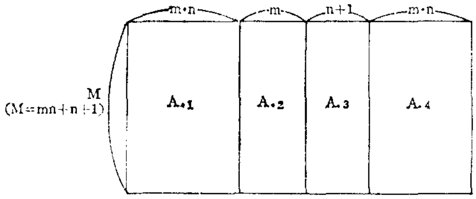
(5) 여기서 Y_1은 x_{mn+1}로 A_1은 x_{mn+m+1} 등으로 표시된다.

여기에서

$$M=\{1,\ 2,\ \cdots,\ mn+n+1\}$$
$$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2mn+m+n+1\}$$

그리고 기술계수 a_{ij}의 行列을 그림 1의 왼쪽에서 오른쪽으로 나가는 순서에 의해서 비슷한 성격의 列(column)들을 모아 다음과 같이 표시하기로 한다.

$$A=[A_{\cdot 1} : A_{\cdot 2} : A_{\cdot 3} : A_{\cdot 4}]$$
$A : M\times N$ 行列
$(M=m\cdot n+n+1,\ \ N=2m\cdot n+m+n+1)$
$A_{\cdot 1} : M\times m\cdot n$ 行列
$A_{\cdot 2} : M\times m$ 行列
$A_{\cdot 3} : M\times (n+1)$行列
$A_{\cdot 4} : M\times m\cdot n$ 行列



Ⅲ. 問題의 解法

문제 (p-1)을 풀기 위해서 修正單體法(Revised Simplex Method)을 이용하기로 하며 문제의 특수한 구조를 이용하여 수정단체법을 효율적으로 적용할 수 있도록 한다.

1. 修正單體法

修正單體法의 이론적근거와 절차를 대략적으로 살펴보면 다음과 같다.

$$\text{Min } Z=PX$$
$$\text{s.t } AX=b$$
$$X\geq 0$$

변수를 基底變數(Basic Variable)와 非基底變數(Nonbasic Variable)로 나누면

$$\text{Min } Z=P_B\cdot X_B+P_N\cdot X_N \quad ①$$
$$\text{s.t } \quad B\cdot X_B+N\cdot X_N=b \quad ②$$
$$x_B,\ y_N\geq 0$$

여기에서

P_B; 기저변수(Basic Variable)의 목적함수의 계수
P_N; 비기저변수(Nonbasic Variable)의 목적함수의 계수
B; 기저변수의 기술계수(Basis)
N; 비기저 변수의 기술계수

② 식에서

$$B\cdot X_B=b-N\cdot X_N$$
$$X_B=B^{-1}\cdot b-B^{-1}\cdot N\cdot X_N \quad ③$$

③식을 ①식(목적함수식)에 대입하면

$$Z=P_B(B^{-1}b-B^{-1}\cdot N\cdot X_N)+P_N\cdot X_N$$
$$=(P_N-P_B\cdot B^{-1}\cdot N)\cdot X_N+P_B\cdot B^{-1}\cdot b$$
$$Z+(P_B\cdot B^{-1}\cdot N-P_N)\cdot X_N=P_B\cdot B^{-1}\cdot b$$

따라서 기저변수와 비기저변수에 따라 列를 정리하면 다음과 같이 된다.

	X_B	X_N	
Z	0	$P_B \cdot B^{-1} \cdot N - P_N$	$P_B \cdot B^{-1} \cdot b$
X_B	I	$B^{-1} \cdot N$	$B^{-1} \cdot b$

그리고 修正單體法의 절차는 다음과 같다.

① B^{-1}의 계산

基底(Basis)를 이루는 行列(B)의 역행렬을 구한다.

② 最適化 검사

$P_B \cdot B^{-1} \cdot N - P_N$을 구하여 모든 계수가 (－)이거나 0이면 최적이므로 정지, 아니면 진입변수와 진출변수의 결정(Basis의 변경)을 통해 해를 개선한다.(6)

③ 진입변수의 결정

$P_B \cdot B^{-1} \cdot N - P_N$에서 그 값이 가장 큰 변수 x_j를 선정한다.

④ 진출변수의 결정

$B^{-1}, A._j$(7)를 구하고 $B^{-1} \cdot b$를 구하여 최소비율검사(Minimum Ratio Test)를 거쳐 진출변수를 결정한다. 따라서 이 과정을 거치면 새로운 基底(Basis)가 발생한다.

⑤ ①번 과정으로 돌아간다.

2. 基底行列의 逆行列의 계산

문제 (p-1)의 ①식은 변수(X_{ij})가 변수(Y_i)의 제약을 받고 있는데 이와 같은 제약식을 VUB라 부른다. 이식은 $X_{ij} - Y_i - S_{ij} = 0$의 형태로 고쳐지게 되는데 이러한 경우 單體法에서 X_{ij}나 S_{ij} 두 변수중 적어도 하나는 반드시 기저변수가 된다[6, 7]. 따라서 문제(p-2)(8)에서 基底(Basis)를 구하였을 때는 이 基底를 이루는 列들을 정리하면 반드시 다음과 같은 형태를 지니게 된다.

$$B = \left[\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & I \end{array}\right]$$

여기에서

B; $M \times M$ 行列 ($M = m \cdot n + n + 1$)

C; $(n+1) \times (n+1)$行列

D; $(n+1) \times m \cdot n$ 行列

I; $m \cdot n \times m \cdot n$ 單位行列(Identity matrix)

따라서 B^{-1}는 다음과 같은 형태를 지니게 된다.(9)

(6) 최대화 문제의 경우는 목적함수의 계수가 ≥ 0일 때 최적이 되지만 최소화 문제를 풀 경우에 ≤ 0인 경우에 최적이 된다.

(7) 여기서의 j는 ③번의 x_j의 j를 의미한다.

(8) 원문제는 (p-1)이지만 (p-1)이나 (p-2)는 같은 문제이고 (p-1)는 (p-1)을 알기쉽게 한 종류의 변수로 정리한 것이므로 (p-2)로 표시한다.

(9) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$라 하고

$$\begin{bmatrix} C & D \\ E & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} I_1 : (n+1) \times (n+1) \\ I_2 : m \cdot n \times m \cdot n \end{array}\right.$$

따라서

$C \cdot \alpha + D \cdot \gamma = I_1$ ①

$C \cdot \beta + D \cdot \delta = 0$ ②

$E \cdot \alpha + I_2 \cdot \gamma = 0$ ③

$E \cdot \beta + I_2 \cdot \delta = I_2$ ④

③식에서 $\gamma = -E \cdot \alpha$ ⑤

⑤식을 ①식에 넣으면

$C \cdot \alpha - D \cdot E \cdot \alpha = I_1$ $(C - D \cdot E) \cdot \alpha = I_1$

$\therefore \alpha = (C - DE)^{-1}$

④식에서 $\delta = I_2 - E \cdot \beta$ ⑥

⑥식을 ②식에 넣으면

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} (C-DE)^{-1} & (C-DE)^{-1}(-D) \\ -E(C-DE)^{-1} & -E(C-DE)^{-1}(-D)+I \end{bmatrix}$$

이때 B^{-1}를 구할때 역행렬은 $(C-DE)$의 역행렬만 구하면 되므로 $(m\cdot n+n+1)\times(m\cdot n+n+1)$의 역행렬을 구하는 문제가 $(n+1)\times(n+1)$을 구하는 문제로 축소된다.

3. 解法의 節次

문제(p-2)의 특수구조 즉 $m\cdot n$개의 VUB를 이용하여 B^{-1}를 구하는 문제는 훨씬 간단해 진다. 그러나 이러한 특수구조를 이용하면 문제의 풀이는 더욱 간단하게 할 수 있다.

1) 최초 基底의 구성

單體法을 진행시키기 위해서는 최초 基底(initial basis)가 필요한데 본 문제에서는 $[A_{\cdot 3} : A_{\cdot 4}]$로서 최초의 기저를 구성하고 이 기저를 개선해 가면서 최적해를 찾게 된다. 이때 基底(Basis) B는 단위행렬을 이루므로 B^{-1}도 단위행렬이 되며 $(C-DE)^{-1}$도 역시 단위행렬이 된다.

2) 最適化 검사

基底에 들어가 있는 변수의 목적함수의 계수는 0이 된다. 따라서 非基底變數의 목적함수의 계수 $P_B\cdot B^{-1}\cdot N-P_N$을 계산하여 $P_B\cdot B^{-1}\cdot N-P_N\leq 0$이면 최적, 그렇지 않으면 基底의 변화를 통하여 해를 개선한다.

3) 進入變數의 決定

진입변수의 결정을 위하여 다음과 같은 기호가 필요하다.

$a_{\cdot j}=\{a_{1j}, a_{2j}\cdots a_{Mj}\}$ $(M=m\cdot n+n+1)$

$\alpha_{\cdot j}=B^{-1}\cdot a_{\cdot j}=\{\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots\alpha_{Mj}\}$

$b(k)$; 基底에서 k번째 列의 색인[10]

$(i : k)$; i번째부터 k번째까지를 나타낸다는 첨자[11]

$\bar{n}=n+1$

변수 x_j가 進入변수가 되었을 때 즉 j번째 列이 基底로 들어오게 되었을 때 $\alpha_{(1:\bar{n})}$을 다음과 같이 구한다.

i) $\alpha_{(1:\bar{n})j}=(C-DE)^{-1}\cdot(I : -D)\cdot a_{\cdot j}$

이때 $(I : -D)\cdot a_{\cdot j}$의 i번째 行의 원소는 $a_{ij}-\sum_{k=\bar{n}+1}^{M}a_{kj}\cdot a_{ib(k)}$가 되므로 $\alpha_{(1:\bar{n})j}$는 $a_{\cdot j}$(원문제의 제 j의 기술계수)와 $(C-DE)^{-1}$, $b(k)$만으로 쉽게 구할 수 있다.

ii) $\alpha_{(\bar{n}+1:M)j}=(-E(C-DE)^{-1} : -E(C-DE)^{-1}\cdot(-D)+I)\cdot a_{\cdot j}$

$=[-E(C-DE)^{-1}\cdot(I : -D)]\cdot a_{\cdot j}+(0 : I)a_{\cdot j}$

$=-E\cdot\alpha_{(0:\bar{n})j}+a_{(\bar{n}+1:M)j}$

따라서 i번째 行의 원소는

$$a_{ij}-\sum_{k=1}^{n}a_{ib(k)}\cdot\alpha_{kj},\ i=\bar{n}+1\cdots, M$$

4) 進出變數의 決定

위와 같이 $\alpha_{(1:\bar{n})j}$와 $\alpha_{(\bar{n}+1:M)j}$를 구한 뒤 $\alpha_{(1:M)}$로 $B^{-1}b$의 값을 나누어 최소비율검사(Minimum Ratio Test)를 통하여 進出變數를 결정한다.

$C\cdot\beta+D\cdot(I_2-E\cdot\beta)=0(C-DE)\cdot\beta=-D$

$\therefore\ \beta=(C-DE)^{-1}(-D)=\alpha\cdot(-D)$

⑥식에서 $\delta=I_2-E\cdot\beta=I_2-E(C-DE)^{-1}(-D)$ ⑦

⑤식에서 $\gamma=-E(C-DE)^{-1}$

따라서

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (C-DE)^{-1} & (C-DE)^{-1}(-D) \\ -E(C-DE)^{-1} & -E(C-DE)^{-1}(-D)+I \end{bmatrix}$$

(10) 예를들어 A matrix의 j번째 列이 B(Basis)의 k번째에 위치하고 있을때 $b(k)=j$

(11) $a_{\cdot j}=a_{(1:M)j}$

5) 새로운 基底의 구성과 逆行列의 계산

진입변수와 진출변수가 결정되면 기존의 基底에서 진출변수에 해당하는 列이 나가고 진입변수에 해당하는 列이 새로 들어와 基底가 바뀌고 새로운 逆行列을 구하여야 되는데 이를 위하여 필요한 기호는 다음과 같다.

β_{ij}; $(C-DE)$의 i 行과 j 列에 속하는 원소

β^n_{ij}; 基底가 변하여$(C-DE)$가 변할 때의 새로운 β_{ij} 이에 대해 그 전의 원소는 β^0_{ij}

$P(\bar{n}+\gamma)$; 行列 $A._1$ 에서 $a_{\bar{n}+\gamma,\gamma}=1$ 일때 $a_{P(\bar{n}+\gamma),\gamma}=1$이 되는 색인[12] 최초의 基底는 $A._3$와 $A._4$로 구성되며 이 基底들의 列과 나머지 列들의 교환을 통해 새로운 基底가 구성되면서 해를 향상시킨다. 그런데 특히 $A._3$의 처음 $\bar{n}$ 개의 列은 人爲變數에 해당하는 것으로 이 列들은 基底에 남아서는 안되고 한번 기저에서 나가면 다시 들어오지 않게 된다. 基底가 변화되는 유형은 다음과 같다.

① 行列 $A._3$의 한列이 基底에서 나감

i) 行列 $A._2$의 한列이 基底에 들어옴

$A._3$의 列은 $B=\begin{bmatrix} C & D \\ E & I \end{bmatrix}$에서 왼쪽 $\bar{n}$ 개의 列에 속하게 되므로 C, E가 변하게 된다.

$(C-D\cdot E)$를 구하면 $\beta_{(1:\bar{n}),\gamma}$만 달라지므로 이를 이용하여 새로운 $(C-DE)^{-1}$을 계산하여 B^{-1}을 구한다.

ii) 行列 $A._1$의 한 列이 基底에 들어옴

B의 γ번째 列이 나가고 $a_{(1:M),c}$가 새로 들어온다 하면

C, E가 변하게 되며

$(C-DE)$의 원소 $\beta_{i\gamma}$은 다음과 같이 변한다.

$$\beta^n_{i\gamma}=\beta^0_{i\gamma}-a_{i\cdot b(\bar{n}+c)}\ (i=1,2,\cdots\bar{n},\ i\neq\gamma,\ i\neq b(\bar{n}+c))$$

$$\beta^n_{\gamma\gamma}=\beta^0_{\gamma\gamma}-1-a_{\gamma,b(\bar{n}+c)}$$

$$\beta_{P(\bar{n}+c)\gamma}=\beta_{P(\bar{n}+c),\gamma}-\beta^0_{\gamma\gamma}+1a_{\gamma b(\bar{n}+c)}$$

이와 같이 $\beta'_{(1:\bar{n}),\gamma}$을 쉽게 구하여 $(C-DE)^{-1}$을 구한다.

② 行列 $A._4$ 한 列이 나감

i) $A._4$의 한 列이 들어옴

이 경우는 $A._4$의 γ번째 列이 나가면 $A._1$의 들어오는 列도 반드시 γ번째 列이된다. 이때는 D가 변하며 $(C-DE)$의 $P(\bar{n}+\gamma)$번째 行이 바뀌게 되는데 이는 다음과 같다.

$$\beta^n_{P(\bar{n}+\gamma),j}=\beta^0_{P(\bar{n}+\gamma),j}-a_{(\bar{n}+\gamma),b(j)},\ j=1,2\cdots,\bar{n}$$

ii) $A._2$의 한 列이 들어옴

$A._4$의 γ번째 列이나 $A._1$의 γ번째 列중 적어도 하나는 基底에 있어야 한다. 따라서 이경우는 $A._1$의 γ번째 列이 이미 基底에 들어와 B의 $\begin{matrix}\overset{\frown}{C}\\ \cdot\cdot\\ \underset{\smile}{E}\end{matrix}$의 한 부분을 구성하고 있음을 의미 하므로 $\begin{matrix}\overset{\frown}{C}\\ \cdot\cdot\\ \underset{\smile}{E}\end{matrix}$에서 $b(k)=\gamma$인 k를 찾아서 $\begin{matrix}\overset{\frown}{C}\\ \cdot\cdot\\ \underset{\smile}{E}\end{matrix}$의 k번째 列이 基底에서 나가고 $A._2$의 한 列이 그 자리에 들어오고 또 다시 $A._4$의 γ번째 列이 나가고 조금 전에 나갔던 $A._1$의 γ번째 列이 들어오는 것으로 위의 ③의 ii)의 경우와 ②의 i)이 동시에 일어나는 것으로 해석하며 C, D, E가 변하게 된다.

③ 行列 $A._1$의 한 列이 나감

이 경우는 새롭게 基底에 들어왔던 列이 다시 나가는 것으로 위의 경우에 비해 잘 나타나지 않는다.

i) $A._4$의 한 列이 들어옴

이 경우는 ③에서도 특히 잘 나타나지 않는데 ②의 i)을 거꾸로 해석한다.

---

(12) $A._1$에서 밑의 $m\cdot n$개의 行은 단위행렬을 이루고 있으며 각列에는 두 원소에만 $a_{ij}=1$이고 나머지는 0이 된다. 이 색인은 $a_{ij}=1$이 성립하는 원소를 찾기 위한 색인이다.

ii) $A_{\cdot 2}$의 한 列이 들어옴

$\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$의 한 列($\gamma$번째)이 달라지는 것으로 C, E의 γ번째 列이 달라지며 $C_{\cdot\gamma}-D\cdot E_{\cdot\gamma}$을 계산하여 $\beta_{(1:n),\gamma}$을 구하여 $(C-DE)^{-1}$을 구한다.

④ 行列 $A_{\cdot 2}$의 한 列이 나감

行列 $A_{\cdot 2}$는 반드시 $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$에만 들어갈 수 있으므로 이것은 $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$의 변화를 의미한다.

i) $A_{\cdot 4}$의 한 列이 들어옴

이 경우는 基底에서 나갔다 다시 들어오는 경우인데 이때는 이에 대응되는 $A_{\cdot 1}$의 한 列이 基底에 있음을 의미하며 ②의 ii)의 경우의 반대 경우이다.

ii) $A_{\cdot 1}$이 한 列이 들어옴

③의 ii)와 반대 경우로 C, E가 달라지며 $(C-DE)^{-1}$에서 바뀌는 列만 달라지게 된다.

5) 行列 $A_{\cdot 3}$의 한 列이 들어오는 경우

$A_{\cdot 3}$는 人爲변수가 구성하는 列이기 때문에 다시 基底로 들어올 수 없지만 단 하나 제일 끝 列은 人爲變數의 列이 아니기 때문에 基底에서 나갔다가 다시 基底로 들어올 수 있다. 이때는 C, E의 γ번째 列이 변하게 되는데 이는 $(C-D\cdot E)$에서도 $\beta_{(1:n),\gamma}$만 변하게 한다.

6) 分段探索法

문제 (p-1)을 單體法(수정단체법)으로 풀면 변수 $m\cdot n$개의 VUB로 인하여 대개는 곧 바로 整數解가나오게 된다. 그러나 整數解가 나오지 않는 경우도 있는데 이때는 분단탐색법(branch and bound method)을 사용하는데 Y_i의 값 중 정수가 아닌 값 중 그 값이 가장 1에 가까운 값을 택하여 1 혹은 0로 놓고 $b\&b$방법을 이용하여 (p-1)을 풀어 나간다.

Ⅳ. 結 論

본 논문의 과제(p-median 문제)는 많은 연구가 이루어지고 있는 과제이며 문제의 크기(size)가 크기 때문에 일반적인 L·P 패키지(Package)나 I·P 패키지로 푸는데는 많은 노력이 필요하며 더욱 (p-1)과 같은 모형은 기하급수적으로 크기가 커지는데 이 모형은 풀기만 하면 곧바로 整數解가 나올 수 있기 때문에 (p-1)의 특수한 구조만 연구하면 쉽게 解를 구할 수 있다. 본 논문에서는 修正單體法을 이용하였는데 문제 (p-1)에서는 $(m\cdot n+n+1)\times(m\cdot n+n+1)$의 逆行列을 구해야 하는데 이것을 $(n+1)\times(n+1)$의 逆行列만 구하면 되게 하였으며 修正單體法의 풀이 과정에서도 문제 (p-1)의 특수구조를 이용하여 그 과정을 간단하게 하여 원래의 修正單體法보다는 훨씬 간단하게 문제 (p-1)을 풀 수 있다.

참 고 문 헌

1. Galvao, R.D., "A Dual-Bounded Algorithm for the p-Median Problem," Opns. Res., Vol. 28, pp. 1112—1121, (1980).
2. Garfinkel, R.S. and A.W. Neebe and M.R. Rao, "An Algorithm for the M-Median Plant Location Problem," Trans. Sci. Vol. 8, pp. 217--236, (1974).
3. Jarvinen, P. and J. Rajala and H. Sinervo, "A Branch-and bound Algorithm for Seeking the p-Median," Opns. Res., Vol. 20, PP. 173—178, (1972).
4. Khumawalla, B.M., "An Efficient branch-and-bound Algorithm for the Warehouse Location Problem," Mgt. Sci., Vol. 18, pp. 718—731, (1972).

5. Narula, S.C. and U.I. Ogbu and H.M. Samuelsson, "An Algorithm for the p-Median Problem," Opns. Res., Vol.25, pp.709-713, (1977).
6. Scharge, L., "Implicit Representation of Variable Upper Bounds in Linear Programming, Math. Prog. Study 4, pp.118-132, (1975).
7. Scharge, L., "Implicit Representation of Generalized Variable Upper Bound in Linear Programming," Math. Prog. Study 14, pp.11-20, (1798).