연구논문집 제 2권 제 1호 p. 9~11 1971

최단강하선과 등시곡선

이 도 원
기초학과

〈요 약〉

최단강하선(Brachistochrone)의 방정식을 세우고 변분학(Calculus of Variations)에서의 Euler의 공식을 이용하여 이 경로를 구하는 미분방정식을 유도하며 그 해를 구한다. 이 해는 *Cycloid* 임을 밝히고 이 곡선은 또한 등시곡선(Tautochrone) 임을 보인다.

Brachistochrone and Tautochrone

Lee, Do Won
Dept. of Basic Studies

<Abstract>

The equation of the Brachistochrone is solved by the introduction of the differential equation, which is obtained by using Euler's formula on the Calculus of Variations. The solution of the differential equation is the cycloid, which is the Tautochrone, too.

I. 서 론

두점 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ 사이를 중력의 작용만으로 최단시간내에 미끄러져 내려가는 구슬(질점)을 생각한다. 이 질점의 경로를 최단강하선(Brachistochrone) 또는 최급강하선,(Curve of steepest descent)라고 하는데 이 곡선의 방정식을 구하고 그 성질을 살펴 보기로 한다.

II. 방정식의 유도

질점이 $P_0(x_0, y_0)$에서 $P(x, y)$까지 움직여 중력에 의하여 한 일은 질점의 질량을 m이라 할때 $mg(y-y_0)$이며 이것은 운동 energy의 변화와 같으므로

$$mg(y-y_0)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0=0$$

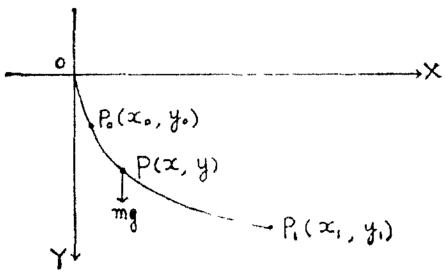

그림 1

따라서 P에서의 속도 v는

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(y-y_0)}$$

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2g(y-y_0)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y-y_0}}\,dx$$

그러므로 (x_0, y_0)에서 (x_1, y_1)까지 굴러 오는데 소요되는 시간은

(1) $$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1-y'^2}{y-y_0}}dx$$

계산을 간단히 하기 위하여 $P_0(x_0, y_0)$를 원점(0, 0)으로 옮기기로 한다. 그리면 (1)은 다음과 같다.

(1)′ $$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

그런데 변분학(calculus of variations)에서

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y,y')dx$$

의 값을 최소로 하는 $y(x)$는

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0$(Euler의 미분방정식) 의 해에서 구할수 있다.

(1)′에서의 $f(x,y,y')$는

$$f(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

이며

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{2yy''-y'^2(1+y'^2)}{2y^{\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

이므로 (1)′식에 대한 Euler의 미분방정식은

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{\frac{3}{2}}}-\frac{2yy''-y'^2(1+y'^2)}{2y^{\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

이것을 정리하면 다음과 같은 미분방정식이 된다

(3) $1+y'^2+2yy''=0$

Ⅲ. 방정식의 해

해를 구하기 위하여 $y'=u$ 라면 $y''=u\frac{du}{dy}$ 이므로

$$1+u^2+2yu\frac{du}{dy}=0$$

변수분리하면

$$\frac{2udu}{1+u^2}=-\frac{dy}{y}$$

적분하면

$$\ln(1+u^2)=-\ln y+\ln c_1$$

$$\therefore 1+u^2=\frac{c_1}{y},\quad u=\pm\sqrt{\frac{c_1}{y}-1}$$

u는 $\frac{dy}{dx}$ 이므로 $\frac{dy}{\sqrt{\frac{c_1}{y}-1}}=\pm dx$

(4) $$\therefore \frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{c_1-y}}=\pm dx$$

(5) $y=c_1\sin^2\varphi \quad (0\leq\varphi\leq\pi)$

로 치환하면

$$dy=2c_1\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

이므로 (4)의 좌변의 적분은

$$\int\frac{\sqrt{c_1}\sin\varphi}{\sqrt{c_1}\cos\varphi}2c_1\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=c_1\int 2\sin^2\varphi d\varphi=c_1\int(1-\cos2\varphi)d\varphi$$

$$=c_1(\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi)$$

따라서 (4)의 해는

$$\pm x+c_2=\frac{c_1}{2}(2\varphi-\sin2\varphi)$$

그런데 초기조건으로 $x=0$때 $y=0$이면 $\varphi=0$가 되며 이것을 위식에 대입하면 $c_2=0$가 된다.

$$\therefore \pm x=\frac{c_1}{2}(2\varphi-\sin2\varphi)$$

$2\varphi=\theta$, $\frac{c_1}{2}=a$나 하고 $x\geqq0$ 이라 하면

$$x=a(\theta-\sin\theta)$$

그리고 (5)에서 y는 $\cos2\varphi=1-2\sin^2\varphi$ 이므로

$$y=\frac{c_1}{2}(1-\cos2\varphi)$$

$$\therefore y=a(1-\cos\theta)$$

그러므로 (1)을 만족하는 x의 함수 y는 θ를 매개변수로 하여

(6) $$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}\quad(0\leq\theta\leq2\pi)$$

이것은 파선(cycloid)의 방정식이다.

여기서 a의 값은 $P_1(x_1, y_1)$에 따라 (6)식에 (x, y) 대신 (x_1, y_1)를 대입하여 θ를 소거하면 구할 수 있다.

Ⅳ. 경로의 음미

$P_0(0,0)$에서 $P_1(x_1, y_1)$까지 굴러 오는데 소요된 시간을 계산하자. (6)에서

$$dx=a(1-\cos\theta)d\theta,\quad dy=a\sin\theta d\theta$$

이므로 (1)식의 피적분함수는 다음과 같다.

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a^2(1-\cos\theta)}{a(1-\cos\theta)}}\,d\theta=\sqrt{2a}\,d\theta$$

그리고 $x=x_1$ 일때 $\theta=\theta_1$ 이라면 소요된 시간 t_1 은 다음과 같다

$$t_1=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\theta_1}\sqrt{2a}\,d\theta=\theta_1\sqrt{\frac{a}{g}}$$

만일 P_1이 cycloid의 최하단부 $P_l(\pi a, 2a)$라고 하면 원점에서 P_l까지 구슬이 굴러오는데 소요된 시간 t_l는 다음과 같다.

$$t_l=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

만일 원점에서 P_l까지 직선을 따라 굴러 간다면 이때 걸린 시간을 t_l'라 하고 구해 본다. $y=\frac{2}{\pi}x$이므로

$$t_l'=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\pi a}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}{\frac{2}{\pi}x}}\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2\sqrt{\pi g}}\int_0^{\pi a}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\pi^2+4}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

즉 $t_l<t_l'$ 임을 안수 있다.

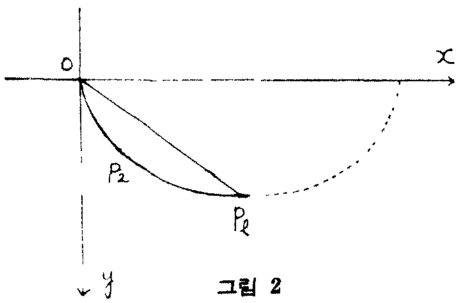

그림 2

지금 cycloid의 반호내의 임의의 점 $P_2(x_2, y_2)$에서 P_l 까지 굴러 오는데 걸리는 시간 t_2를 구해보자. 이때에 P_2와 P_l사이에서의 속도는

$$v=\sqrt{2g(y-y_2)}$$

이며 $x=x_2$ 일때 $\theta=\theta_2$ 라 하면

$$y_2=a(1-\cos\theta_2)$$

이므로

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_2}^{\pi}\sqrt{\frac{2a^2(1-\cos\theta)}{a(\cos\theta_2-\cos\theta)}}\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_2}^{\pi}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(2\cos^2\frac{\theta_2}{2}-1\right)-\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)}}\,d\theta$$

$$=-2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_2}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_2}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta_2}{2}}\right]_{\theta_2}^{\pi}$$

$$=2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(-\sin^{-1}0+\sin^{-1}1\right)$$

$$=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

즉 이 결과는 θ_2에 독립이다. 이것은 호 위의 어느 점에서 움직이기 시작해도 시간은 동일하게 소요된다는 것이다. 이런 의미에서 cycloid 호는 등시곡선(tautochrone)임을 알수 있다.

V. 결　　론

중력에 의하여 두점 사이를 최단시간에 미끄러저 내려가는 곡선을 최단강하선 이라 하는데 이것은 cycloid이며 이 경로는 또한 등시곡선 임을 보였다.

참 고 문 헌

1. SPIEGEL, M.R., Applied Differential Equation, §11 chap. 3 Prentice Hall (1963)

2. THOMAS, B.G., Calculus and Analytic Geometry §2 Chap. 11 AddisonWesley (1953)

3. 吉田耕作 外共編, 應用數學便覽, p. 287~289, 日本 丸善 出版部(1967)