

Ring 으로 補剛된 圓形실린더 Shell의 應力解析

朴 稚 模

造船工學科

(1984. 4. 30 접수)

〈要 約〉

有限要素法이 依하여 構造物의 挫屈解析을 할 때 必要한 幾何學的 剛性 matrix는 初期應力*의 項을 포함하게 된다. 이때, 기둥이나 平板의 경우에는 線內 또는 面內에서의 平衡條件에 依하여 쉽게 初期應力を決定하여 정확한 幾何學的 剛性 matrix를 構成할 수 있으나, shell의 경우, 특히, 補剛된 shell의 경우에는 初期應力を決定하는 것이 그다지 간단하지 않으며, 또한, 初期應力의 精度가 挫屈荷重의 精度에 크게 영향을 미치는 것으로 생각된다.

따라서, 本論文에서는 有限要素法을 使用하여 ring 으로 補剛된 圓形 실린더 shell에 대한 應力解析을 하여 그 結果를 挫屈解析에 利用할 수 있게 하였다.

Stress Analysis of Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shells

Park, Chi Mo

Dept. of Naval Architecture and Shipbuilding

(Received April 30, 1984)

〈Abstract〉

In general, geometrical stiffness matrix required to structural stability analysis contains the prebuckling stress terms.

Then, in case of columns or plates, pre-buckling stresses can be determined by means of equilibrium conditions in line or plane and the geometrical stiffness matrix can be constructed exactly.

But, in case of shells, especially stiffened shells, it's not so easy to determine the pre-buckling stresses, and the accuracy of them is thought to be concerned with that of critical load.

In this paper, therefore, stress analysis of ring-stiffened cylindrical shell has been performed by means of the finite element method, and the results can be used to make the geometrical stiffness matrix.

I. 序 論

기하학적 剛性 matrix를 구성하기 위해서는 주어진 荷重상태의 單位荷重值에 대한 pre-buckling 상태의 應力を決定해야 한다.

일반적으로, shell 構造物의 強度는 材料의 허용應力值보다는 挫屈現像에 지배된다고 볼 수 있다.

有限要素法에 의하여 구조물의 挫屈解析을 할 때

이때, 기둥이나 平板의 경우는 pre-buckling 상태에서 面外變位에 依한 鉛直이 發生하지 않으므로 線內 또는 面內에서의 平衡條件에 依해 비교적 간단

* 여기서 初期應力은 挫屈이 發生하기前 상태에서의 荷重에 依한 應力を 뜻한다.

히 初期應力を 決定할 수 있으나, lateral pressure 를 받는 cylindrical shell의 경우는 pre-buckling 상태에서도 面外變位에 依한 굽힘이 發生하므로 初期應力を 구하는 문제가 그다지 단순하지가 않다.

이 경우, 보강되지 않은 실린더의 경우는 兩端 근처에서만 길이방향의 급격한 굽힘이 存在하고 나머지 부분에서는 반경 방향의 變位가 거의 均一하고로⁽¹⁾ 모든 영역에서 應力이 均一한 것으로 단순화해서 생각할 수도 있으나, 특히, ring으로 補剛된 cylindrical shell의 경우는 不靜定問題가 되어 初期應力を 해석적으로 구하기가 어려울 뿐 아니라 원주방향 應力의 길이 方향으로의 變化가 크기 때문에 이것을 均一하게 分布하는 것으로 생각할 수도 없다.

따라서, 本論文에서는 有限要素法을 使用하여, 특히 잠수함 船殼의 主를 이루는 ring으로 補剛된 circular cylindrical shell의 應力解析을 하였다.

특히, 偏心補剛인 경우, 원주방향의 굽힘에 대한 偏心效果 이외에, extensional strain에 대한 ring補剛材와 shell의 半徑의 差異까지 고려하여 해석하였다며, 이것을 무시한 종래의 解석方法⁽²⁾⁽³⁾에 依한 結果와 比較 검토하였다.

II. 問題의 定式化

일반적으로 구조물의 平衡方程式을 주는 Stationary Potential Energy 原理는 다음과 같다.⁽¹⁾

$$\delta^{(1)} [U + \Omega] = 0 \quad (1)$$

여기서, U : total strain energy of the structure
 Ω : total potential due to the external loads.

1. Shell의 變形에너지

일반적으로, cylindrical shell의 strain energy는 다음과 같이 표현된다.

$$U_{st} = U_m + U_b = \frac{1}{2} \iint [C\{\epsilon_{ss}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + 2\nu\epsilon_{ss}\epsilon_{\theta\theta} + 2(1-\nu)\epsilon_{s\theta}^2\} + D\{k_{ss}^2 + k_{\theta\theta}^2 + 2\nu k_{ss}k_{\theta\theta} + 2(1-\nu)k_{s\theta}^2\}] r d\theta ds$$

여기서,

U_m : membrane strain energy

U_b : bending strain energy

$\epsilon_{\alpha\beta}$: membrane strain

$k_{\alpha\beta}$: curvature strain

$$C = \frac{Et}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

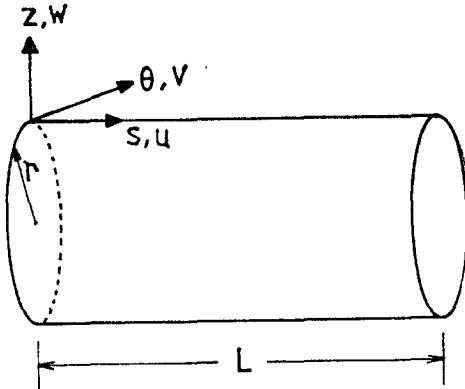


Fig. 1. Coordinate system of cylindrical shell

pre-buckling 상태에서의 모든 거동은 축대칭이므로 $k_{\theta\theta} = k_{s\theta} = 0$ 이다. 또한 Torsion이 없는 경우 $\epsilon_{s\theta} = 0$ 이므로 (2)式은 다음과 같이 된다.

$$U_{st} = \frac{1}{2} \iint [C\{\epsilon_{ss}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + 2\nu\epsilon_{ss}\epsilon_{\theta\theta} + 2(1-\nu)\epsilon_{s\theta}^2\} + Dk_{ss}^2] r d\theta ds \quad (3)$$

2. Ring 補剛材의 變形에너지

ring의 變形에너지지는 다음과 같이 표현된다.⁽²⁾

$$U_{st} = \frac{1}{2} \int E \{A_f(\epsilon_{\theta\theta}^2 + I_r k_{\theta\theta}^2) r\} d\theta \quad (4)$$

여기서,

$\epsilon_{\theta\theta}$: ring-stiffener의 extensional strain

$k_{\theta\theta}$: ring-stiffener의 curvature strain

r_s : ring-stiffener斷面의 圖心에서의 軸를 半徑

A_f : ring-stiffener의 斷面積

I_r : ring-stiffener 단면의 2次 moment

stiffener의 extensional strain과 curvature strain은 shell의 mid-surface의 strain $\epsilon_{\theta\theta}$, $k_{\theta\theta}$ 와 shell의 mid-surface와 stiffener 단면의 도심 사이의 거리 Z 의 項으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta} \times \frac{r}{r_s} + Z k_{\theta\theta}$$

$$k_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}$$

여기서, 축대칭 變形이므로 $k_{\theta\theta} = k_{\theta\theta} = 0$ 임을 고려하면 $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta} \times \frac{r}{r_s}$ 이고, 따라서 (4)式은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} U_{ss} &= \frac{1}{2} \int EA / \left(\epsilon_{\theta\theta} + \frac{r}{r_s} \right)^2 r_s d\theta \\ &= -\frac{1}{2} EA l_f \left(\epsilon_{\theta\theta} + \frac{r}{r_s} \right)^2 \cdot 2\pi r_s \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{r_s} EA l_f \epsilon_{\theta\theta}^2 \cdot 2\pi r_s \quad (5) \end{aligned}$$

3. External pressure load에 의한 Potential

circular cylindrical shell의 靜水壓을 받을 때
external pressure load에 의한 potential은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \iint P w r d\theta ds = \pi r^2 p(u)_{\text{at } s=0} + \pi r^2 p(u)_{\text{at } s=L} \\ &= 2\pi r \cdot p \int_0^L w ds = \pi r^2 p(v)_{\text{at } s=0} + \pi r^2 p(u)_{\text{at } s=L} \quad (6) \end{aligned}$$

III. 有限要素의 定式化

1. 變位함수의 假定

cylindrical shell은 Fig. 2와 같이 簡略화해서

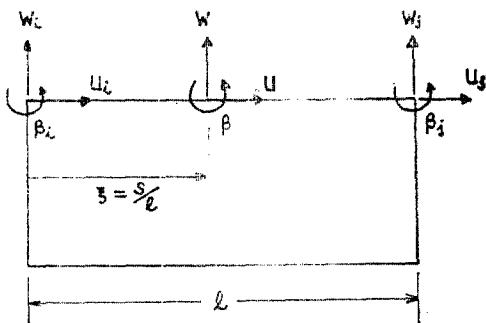


Fig. 2. Element geometry with displacement degree of freedom

3개의 自由度를 갖는 shell要素은 離散화하고 要素 내의 變位를 다음과 같이 表す 것이다.

$$\begin{aligned} u &:= \alpha_1 + \alpha_2 \xi \\ w &:= \alpha_3 + \alpha_4 \xi + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi^3 \end{aligned}$$

여기서, $\xi := \frac{s}{l}$, l 는 要素의 길이

$$\beta := \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{l}, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{l}(\alpha_4 + 2\alpha_5 \xi + 3\alpha_6 \xi^2) \quad (7)$$

(7)式에서,

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix}_{\xi=0} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix}_{\xi=1} = \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}$$

이므로 $\{\alpha\}$ 을 소거하고 要素내 變位를 節點 變位로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= (1-\xi)u_i + \xi u_j \\ w &= (1-3\xi^2+2\xi^3)w_i + l(\xi-2\xi^2+\xi^3)\beta_i \\ &\quad + (3\xi^2-2\xi^3)w_j + l(\xi^3-\xi^2)\beta_j \quad (8) \\ \beta &= \frac{6}{l}(\xi^2-\xi)w_i + (1-4\xi+3\xi^2)\beta_i \\ &\quad + \frac{6}{l}(\xi-\xi^2)w_j + (3\xi^2-2\xi)\beta_j \end{aligned}$$

2. 變形度-變位 關係

cylindrical shell의 일정 초기 變形도와 變位의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{rr} \\ k_{ss} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{rr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ k_{11} \\ k_{22} \\ k_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon^{(1)} \\ \epsilon^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_{,s} &= \frac{w}{r} + \frac{w}{r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{,s}}{r} + v_{,s} \right) + \frac{1}{2r} (w_{,s} w_{,\theta}) \\ &= w_{,ss} \\ &= \frac{w_{,s\theta}}{r^2} + \frac{v_{,s\theta}}{r^2} \\ &= \frac{v_{,ss}}{2r} = \frac{i w_{,s\theta}}{r} \quad (9) \end{aligned}$$

여기서, $\{\epsilon^{(1)}\}$ 은 刚性 matrix를 구성하는 1次項이고, $\{\epsilon^{(2)}\}$ 는 기하학적 刚性 matrix를 구성하는 2次項이다.

마지막, 應力解析에서는 $\{\epsilon^{(1)}\}$ 만이 유용하고 그 중에서도 pre-buckling을 처리하는 變形度, 變位項만을 남기면 (9)式은 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ k_{ss} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,s} \\ w \\ -w_{,ss} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

(8)式을 (10)式에 대입하고 이것을 matrix로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ k_{ss} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3)/r & (\xi-2\xi^2+\xi^3)l/r \\ 0 & (6-12\xi)/l^2 & (4-6\xi)/l \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (3\xi^2 - 2\xi^3)/r & (-\xi^2 + \xi^3)l/r \\ 0 & (12\xi - 6)/l^2 & (2 - 6\xi)/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{bmatrix} \quad (11)$$

即,

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (12)$$

3. 應力-變形度 關係

cylindrical shell의 變形에너지 를 나타내는 (3) 式을 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{sh} = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \{\epsilon\}^T [D_{sh}] \{\epsilon\} trd\theta ds \\ = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \int_0^l \{\epsilon\}^T [D_{sh}] \{\epsilon\} t l d\xi \quad (13)$$

여기서, $[D_{sh}]$ 는 Shell의 應力-變形度 관계를 나타내는 matrix로서 다음과 같다.

$$[D_{sh}] = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 \\ \nu C & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

stiffener의 變形에너지 를 나타내는 (5)式을 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{st} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \{\epsilon\}^T [D_{st}] \{\epsilon\} A_f \quad (14)$$

여기서, $[D_{st}]$ 는 stiffener의 應力-變形度 관계를 나타내는 matrix로서 다음과 같다.

$$[D_{st}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E \frac{r}{r_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 剛性 matrix 와 平衡方程式

(13)式에 (12)式을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$U_{sh} = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \cdot 2\pi r l \int_0^l \{\delta\}^T [B]^T [D_{sh}] [B] \{\delta\} t d\xi \\ = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \{\delta\}^T \cdot 2\pi r l \int_0^l [B]^T [D_{sh}] [B] d\xi \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^{NELEM} \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{sh}] \{\delta\} \quad (15)$$

여기서, $[k_{sh}]$ 는 shell要素의 刚性 matrix이다.

(14)式에 (12)式을 대입하면 다음과 같아 된다.

$$U_{st} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot 2\pi r A_f \{\delta\}^T [B]^T [D_{st}] [B] \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{\delta\}^T 2\pi r A_f [B]^T [D_{st}] [B] \{\delta\} \\ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{\delta\}^T [k_{st}] \{\delta\} \quad (16)$$

여기서, $[k_{st}]$ 는 Stiffener의 刚性 Matrix이다. (6)式에 (8)式의 w 값을 대입하고 matrix로 표시하면 다음과 같다.

$$\Omega = \sum_{i=1}^{NELEM} 2\pi r p \int_0^1 [0 \ (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \ l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \ 0] \\ \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \beta_i \\ u_j \\ w_j \\ \beta_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{l}{12} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix} \{\delta\} \\ = \pi r^2 p [u]_{1st \ node} + \pi r^2 p [u]_{last \ node} \\ = \sum_{i=1}^{NELEM} 2\pi r l p \left[0 \ \frac{1}{2} \ \frac{l}{12} \ 0 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{12} \right] \{\delta\} \\ = \pi r^2 p [u]_{1st \ node} + \pi r^2 p [u]_{last \ node} \\ = [P_E] \{\Delta\} \quad (17)$$

여기서 $[P_E]^T$ 는 equivalent nodal load vector이고

$$\{\Delta\} = \sum_{i=1}^{NELEM} \{\delta\} \text{로서 shell 전체의 節點變位를 의미 한다.}$$

(15), (16), (17)式을 (1)式에 대입하면 다음의 平衡方程式을 얻는다.

$$\left(\sum_{i=1}^{NELEM} [k_{sh}] + \sum_{i=1}^n [k_{st}] \right) \{\Delta\} = [P_E]^T$$

即, $[P_E]^T$ 를 $\{P_E\}$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$[K] \{\Delta\} = \{P_E\} \quad (18)$$

적절한 Boundary Condition을 적용하여 (18)式을 풀어서 節點變位를 구한 뒤 다음式에 의하여 shell과 stiffener의 應力を 구한다.

$$\begin{cases} \sigma_{ss} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \frac{M_s}{t} \end{cases}_{\text{shell}} = [D_{sh}] [B] \{\delta\}$$

여기서, $[D_{sh}] [B]$ 는 shell의 stress matrix이다.

$$\begin{cases} 0 \\ \sigma_\theta \\ 0 \end{cases}_{\text{stiffener}} = [D_{st}] [B] \{\delta\}$$

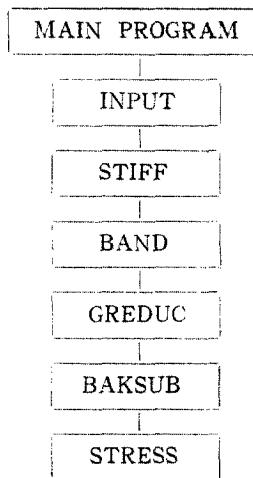
여기서, $[D_{st}] [B]$ 는 stiffener의 stress matrix이다.

V. 數值解析

1. Program 와 構成

Program은 일반적인 有限要素法에 의한 應力解

析 순서에 따라 다음과 같이 구성하였다.



2. 解析例 및 考察

<MODEL>: 軸方向과 lateral 方向의 靜水壓을 받

는 T-形 斷面의 ring-stiffener로 補剛된 실린더.

Fig. 3의 Model에 대하여, 다음의 두 境界條件下에서 應力を 계산하였다.

a) Simply Supported Condition

$$u \neq 0, \quad w = 0, \quad \beta \neq 0 \text{ at both ends}$$

b) Clamped Condition

$$u \neq 0, \quad w = 0, \quad \beta = 0 \text{ at both ends}$$

shell 전체를 길이 방향으로 60개의 要素로 等간격으로 분할하여 계산하였으며 stiffener가 shell의 안쪽에 붙은 경우와 바깥 쪽에 붙은 경우 두 가지에 대하여 解析比較하였다.

Fig. 4에는 두 가지 境界條件에 대하여 單位荷重(1 psi)이 作用하는 경우의 반경 方向의 變位(w)을 表示하였다.

Fig. 5에는 shell과 stiffener 각각에 대한 원주 方向의 應力を 表示하였으며 대략적인 形狀이 Fig. 4와 같음을 알 수 있다. 단지 兩端에서 應力이 略

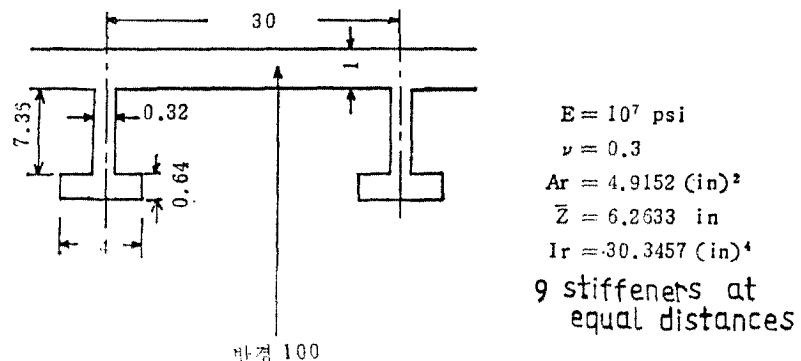
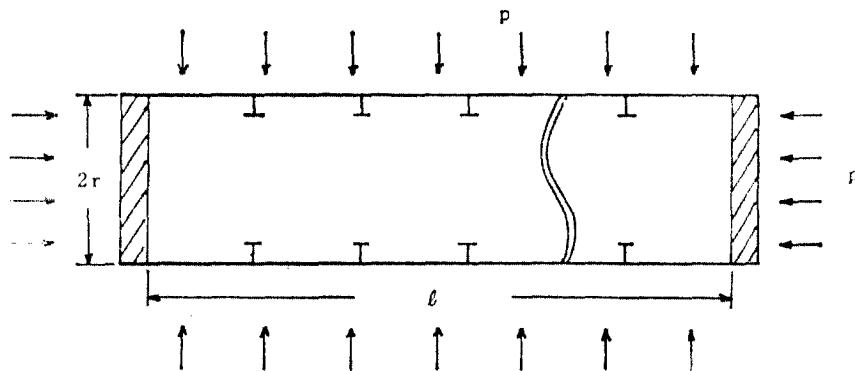


Fig. 3. MODEL

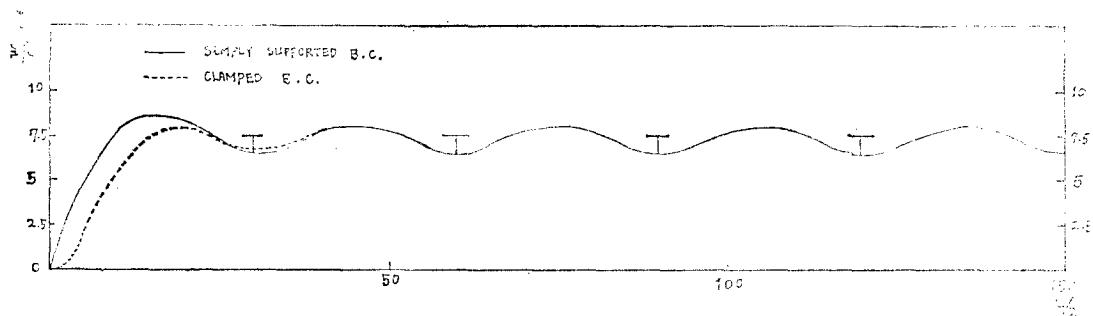


Fig. 4. Displacement in the radial direction (inner stiffener)

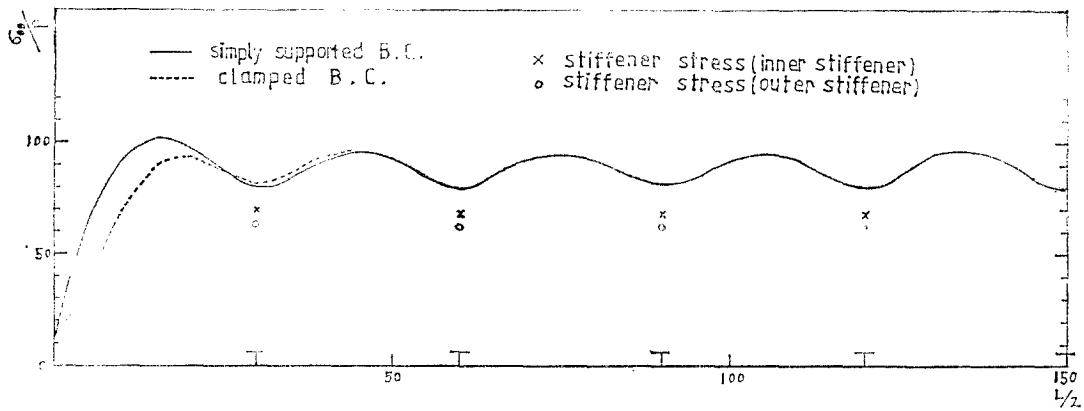


Fig. 5. Stress in the circumferential direction (inner stiffener)

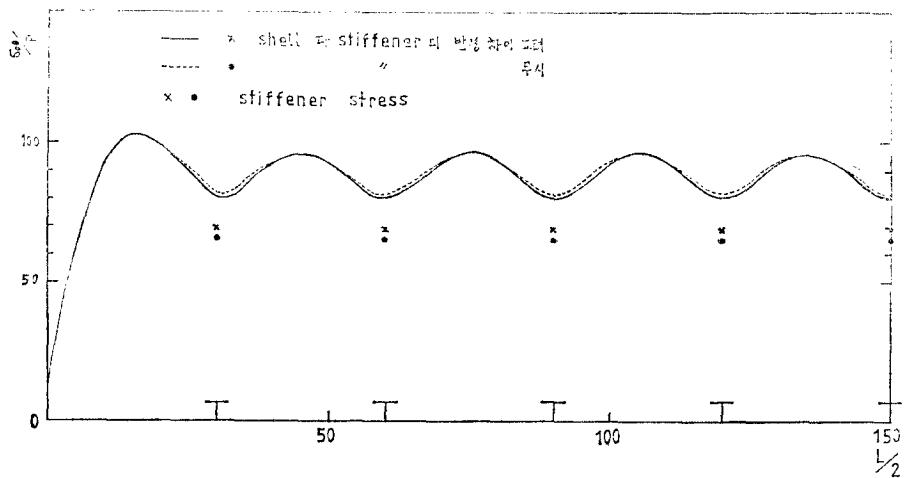


Fig. 6. Stress in the circumferential direction (simply supported B.C.) —inner stiffener—

이 아닌 것은, 원주방향의 變形度는 零이나 절이 방향의 變形度가 存在하므로, $\sigma_{\theta\theta} = \frac{c}{t} \nu \epsilon_{ss}$, 단률의 應力이 存在하기 때문이다.

또한, stiffener 가 안쪽에 붙은 경우와 바깥쪽에 붙은 경우의 shell과 stiffener 의 應力を 비교하였다.

Fig. 6에는 shell과 stiffener 의 반경의 差異를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우를 比較하였다.

V. 結論

이상의 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) shell과 stiffener 의 반경의 차이를 고려하지 않고 해석하는 경우, 이를 고려하는 경우에 비해 stiffener 應力에서 약 4.8% 정도의 오차를 보이고 있으며, stiffener 를 안쪽에 붙이는 경우와 바깥쪽에 붙이는 경우의 應力值에 차이가 나타나지 않았다.(반경의 차이를 고려하는 경우 stiffener 應力에서 약 10%의 차이가 나타났다.)

2) 境界條件의 영향은 端에서부터 둘째 번 stiff-

ner 이내 구간에서만 나타난다.

3) 절이 방향의 membrane stress σ_{ss} 는 均一하지는 않으나, 그 變化는 절이 방향으로의 w 의 變化로부터 계산해 볼 수 있다.

$$\left(\sigma_{ss} = \frac{c}{t} (\epsilon_{ss} + \nu \epsilon_{\theta\theta}), 여기서 \epsilon_{ss} \text{는一定} \right)$$

참 고 문 헌

- (1) Don O. Brush and Bo O. Almroth, "Buckling of Bars, Plates, and Shells" McGraw-Hill, 1975.
- (2) J. Subbiah and R. Natarajan, "Stability Analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution," J. of Ship Research, Vol. 26. No. 2, 1982, pp. 125~134.
- (3) D.O. Choi, "Stability analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution" Seoul National Univ. MA. Thesis, 1984.
- (4) E. Hinton and D.R.J. Owen, "Finite Element Programming" Academic Press, 1977.