

## 중첩법을 이용한 네변고정 직사각평판의 횡진동해석

안시영 · 임홍일

수송시스템공학부 조선공학전공

### <요 약>

평판의 횡진동해석에 가장 널리 사용되는 Rayleigh-Ritz방법을 사용한 근사해석에서는 어느 한 맞변 이상이 단순지지인 경우를 제외한 기타 경계조건의 경우, 지배미분방정식을 정확히 만족하는 함수를 찾아 고유진동수 및 진동모드를 구하는 일이 일반적으로 용이하지 않다. 반면, 중첩법을 사용한 진동해석에서는 지배미분방정식을 정확히 만족하는 급수해를 선택하여 정밀고유진동수를 얻을 수 있다. 선박의 국부진동해석에는 다양한 경계조건과 세장비를 가진 직사각평판의 고유치를 구하는 것이 대단히 중요하며 이에 대한 정확한 설계자료가 초기설계시 필요하다. 따라서 네변고정 직사각평판의 진동해석에 중첩법을 적용하여 정밀해를 계산할 필요성이 있다.

본 논문에서는 네변고정 직사각평판의 진동해석에 중첩법을 사용하여 국내, 국외에서 일반적으로 제공된 다섯 가지 세장비 외에, 1.0에서 3.25까지를 0.25 간격으로 10차까지의 무차원화된 고유치를 계산하였고, 이 결과를 테이블로 정리하여 직접 계산에 활용할 수 있게 하였다. 해석 방법의 타당성 여부를 확인하기 위하여 이론치를 문헌자료 및 상용프로그램인 ANSYS에 의한 계산값과 비교 검토해 본 결과, 잘 일치하고 있음을 확인하였고, 또한 충격가진을 이용한 실험결과치와 이론치를 비교, 검토해 본 결과 비교적 잘 일치함을 확인하였다.

## Lateral Vibration Analysis of Fully Clamped Rectangular Plates by the Method of Superposition

Si Young Ahn · Hong Il Im

School of Transportation Systems Engineering

### <Abstract>

It is well known that some difficulties have been encountered when attempting to analyze the free vibration of plates that do not have at least one pair of opposite edges simply supported. It is not an easy task to select appropriate series of functions to represent plate lateral displacement when using the Rayleigh-Ritz method. In fact, in the case of plates with free edges, it has been demonstrated that fully appropriate functions do not exist.

In this paper, the superposition method which satisfy the governing differential equation exactly throughout the entire domain of the plate is utilized to analyze the natural frequencies and mode shapes of fully clamped rectangular plates. The method is found to work extremely well and excellent agreement is obtained when comparison is made between computed results and earlier reliable published data. And it needs to be noted that agreement between theory and experiment is good. Accurate eigenvalues are tabulated for a wide range of plate geometries(values of aspect ratio vary from 1.0 to 3.25 in intervals of 0.25) and vibration mode families.

## 1. 서 론

선체를 형성하는 판구조에 대해서는 이중저구조를 제외하고 보통 문제될 수 있는 진동 영역에서는 박판이론을 적용하는 것이 타당하다[1]. 이에 대하여, 각 경계조건과 다양한 세장비를 가진 직사각 평판의 고유진동수를 차수별로 도표화한 설계자료는 공진문제를 즉시 해결하는데 대단히 긴요할 것이다.

균질, 등방성이고 얇은 균일두께 직사각형 평판에 있어 면에 수직한 방향의 횡진동해석에 대하여 4변이 모두 단순지지인 경우라면 이론적 엄밀해를 쉽게 얻을 수 있다. 또 어느 한 맞변이 단순지지일 경우에도 수학적 어려움이 그다지 크지 않다. 그러나 기타 경계조건의 경우에는 고유진동수 및 진동모드를 구하는 일이 일반적으로 용이하지 않다. 특히, 가장 널리 사용되는 방법으로 단순보 고유함수를 이용한 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 근사 계산에서 모든 경계조건에 대하여 지배미분방정식을 정확히 만족하는 함수를 찾는다는 것은 매우 어려운 작업이다.

국내에서는 김극천 등[2]이 다른 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 근사 계산으로, 직사각 평판의 진동해석에서 첫째, 한 맞변이 단순지지이고 다른 맞변이 고정인 경우에 대하여 12가지 세장비에 대한 진동수를 계산하였고, 둘째, 두 개의 맞변이 각각 (고정-자유, 고정-고정), (고정-단순지지, 고정-고정), (고정-단순지지, 고정-단순지지), (고정-자유, 고정-자유)의 경우에 대하여 12가지 세장비에 따른 6차까지의 근사계산을 하였다. 정밀해에 관하여, 이낙주 등[3]은 세변이 고정이고, 나머지 한 변이 자유인 경계조건에 대해서 중첩법을 적용한 바 있는데, 그들은 세장비 2/5, 2/3, 1, 3/2, 5/2에 관한 무차원 고유치를 6차까지 계산하여 발표하였다. 한편, 국외에서 Leissa[4]는 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 일반적인 모든 직사각평판의 경계조건에 관해서 고유치를 계산하였고, Gorman[5]은 Rayleigh-Ritz 방법

의 단점을 보완하고 평판 전 영역, 모든 경계조건에 걸쳐 정확히 지배미분방정식을 만족시키는 해를 찾기 위하여, 일반적인 보 특성함수들에 의해 만족하지 않는 경계조건에 대하여 최초로 직사각평판의 자유진동해석에 중첩법(Superposition Method)을 도입하였다. 그는 다섯 가지 세장비에 대한 무차원 고유치를 모드형 별로 각각 5차까지 테이블화 하였으며, 고체역학에서 잘 이용되어진 중첩법이 동적해석에서도 잘 적용됨을 확인하였다.

이와 같이 국내에서는 제한된 경계조건과 세장비에 관한 평판에 대해서 흔히 사용되는 Rayleigh-Ritz방법에 의한 근사해석과 중첩법을 사용한 정밀해석이 다루어졌는데, 특히, 중첩법에 의한 정밀진동해석은 세 변이 고정이고 나머지 한 변이 자유인 경계조건 밖에는 다루어 지지 않았다[3]. 따라서 네변고정 직사각평판의 진동해석에 중첩법을 적용하여 더욱 다양한 세장비에 관한 정밀해를 계산할 필요성이 있다.

따라서 본 논문에서는 중첩법을 이용하여 네변고정 직사각평판의 진동해석을 수행하였다. 여기서는 시간에 관한 함수인 조화급힘모멘트가 경계를 따라 분포하는 평판의 정상상태 동적응답으로 무차원 고유진동수 및 진동모드를 해석하였다. 해석을 위한 프로그램에서는, 프로그램 간략화를 위하여 많은 내장함수를 지원하는 프로그래밍 언어인 MATLAB으로 코딩하여, 평판의 세장비 1.0에서 3.25까지 0.25간격으로 10차까지의 무차원 고유치를 테이블로 만들어 직접계산에 활용할 수 있게 하였다. 실험에서는 네변고정지지를 구현하기 위하여 볼트고정방식을 사용하였고, 4가지 대표적 세장비에 관해 충격가진으로 6차까지의 고유진동수를 구하였다.

상기 중첩법으로 구한 정밀계산치와 문헌자료 및 ANSYS를 사용한 유한요소해석 결과를 서로 비교하였고, 또한, 실험에서 얻은 결과치와도 비교 및 검토를 행한 결과, 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

## 2. 중첩법 이론에 관한 고찰

### 2.1 지배미분방정식 및 경계조건의 무차원화

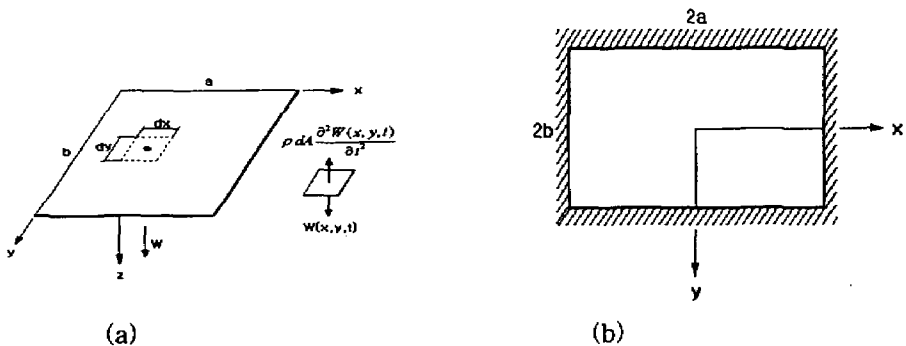


Fig.2.1 Rectangular plate showing a typical coordinate system and a differential plate element subjected to an inertial force.

본 논문에서는 Fig.2.1 (a)에서와 같은 전단변형 및 회전관성을 무시한 일반적 평판 굽

협자유진동에 관한 지배 미분방정식을 이용하여 변위함수  $W(x, y, t)$ 를 공간과 시간에 관한 함수로 변수분리한 후, 원식에 대입하여 미분방정식을 얻고 이를 무차원화 하였는데, Fig.2.1 (b)에서 보이는 것과 같이 각 축에 대해서 경계조건이 대칭이 되도록 1/4로 나누고, 평판치수의 절반을  $a, b$  라 하면  $x, y$  각 방향 무차원 좌표는  $\xi=x/a, \eta/b$  라 정의한다. 이를 원래 식에 대입하여 무차원화 하면 아래 식(2.1)와 같이 정리할 수 있다[6~8].

$$\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} - \phi^4 \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (2.1)$$

여기서,  $\phi$  : 평판의 세장비(aspect ratio),  $\phi=b/a$

$\lambda$  : 무차원 고유치,  $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$

$\omega$  : 각진동수 (rad/s)

$\rho$  : 단위면적당 평판밀도  $kg/m^2$

$D$  : 평판굽힘강성,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$

$E$  : 영률 ( $N/m^2$ )

$h$  : 평판두께(m)

$\nu$  : 포아송비

한편, 고정단에 적용되는 경계조건 및 경계에 적용될 굽힘모멘트(distributed bending moments)와 연직반력(vertical edge reaction)의 무차원화된 식은 각각 다음식과 같다.

$$W(\xi, \eta) = \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \quad | \quad \xi=1$$

$$\frac{M_{\xi a}}{D} = - \left[ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right], \quad \frac{M_{\eta \phi b}}{D} = - \left[ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\phi \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right]$$

$$\frac{V_{\xi a^2}}{D} = - \left[ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right], \quad \frac{V_{\eta \phi b^2}}{D} = - \left[ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \phi^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]$$

여기서,  $\nu^* = (2 - \nu)$

### 2.2 지배미분방정식의 해

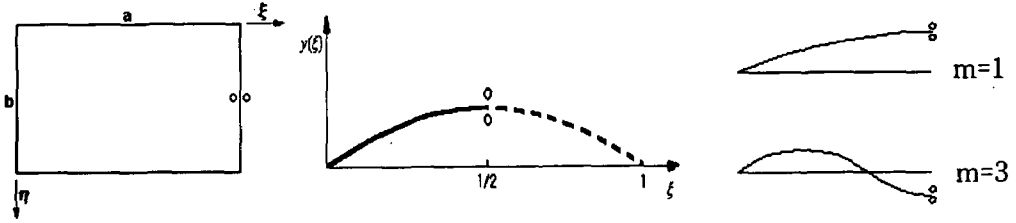


Fig.2.2 Curve  $y(\xi)$  with symmetric distribution about  $\xi=1/2$

본 논문에서는 프랑스의 수학자 Le'vy[7]가 제안한 단일 삼각함수 급수해를 사용하여 모드형별로 변수  $\varphi, \eta$  각 방향, 두 구성블록에 대하여 해석을 수행하였는데, Fig.2.2 에서와 같이  $\varphi=1/2$ 를 중심으로 좌우 대칭인 모드에서 식(2.2)이  $\varphi=0$  과  $\varphi=1/2$  에서 정확히 경계조건을 만족하는 변위함수  $W(\xi, \eta)$ 를 가정함에 있어 다음 식(2.2)과 같이 쓸 수 있고 이는  $\varphi=0$  과  $\varphi=1$ 을 대입하면 정확히 경계조건을 만족함을 알 수 있다.

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m(\eta) \frac{\sin m\pi\xi}{2} \tag{2.2}$$

식(2.2)을 식(2.1)에  $(m\pi/2)^2$ 의  $Y_m(\eta)$ 를 얻을 수 있고, 이들을 식(2.2)에 대입한 후, 선형미분방정식에서 해의 중첩원리를 이용하여 첫번째 구성블록에 대한 해를 다시 쓰면 다음식과 같다. 부호에 따라 대입하여 정리하여 특성방정식을 사용하고, 근의 공식으로 풀면,

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) = & \sum_{m=1,3,5}^k (A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta) \\ & + C_m \sin \gamma_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \\ & + \sum_{m=k+2}^{\infty} (A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta) \\ & + C_m \sinh \gamma_m + D_m \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서,  $\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi/2)^2}$   
 $\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi/2)^2}$  또는  $\gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi/2)^2 - \lambda^2}$

### 2.3 고유치행렬의 구성

사변고정평판에서 나올 수 있는 모든 진동형은 네 가지로 구분할 수 있다.

그 첫째는,  $\phi$ 축 및  $\eta$ 좌표축 모두에 대하여 대칭인 경우, 둘째, 두 좌표축 모두에 대하여 비대칭인 경우가 있고, 셋째,  $\phi$ 축에 대하여 대칭이고  $\eta$ 축에 대하여는 비대칭인 모드와 넷째, 그 반대인 경우를 합하여 취급할 수 데, 이들을 각각 분리하여 해석을 수행하였다.

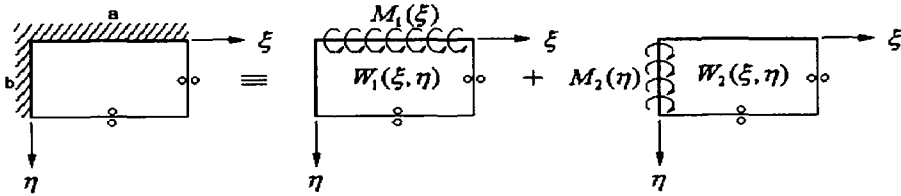


Fig.2.3 Building blocks for analyzing the doubly symmetric modes of fully clamped plates.

고유치행렬의 생성은 앞에서 언급한 세가지 모드에 따라 각각 따로 행렬을 생성하여 해석을 해야 하는데, 그 방법이 동일하므로 본 논문에서는 Fig.2.3에 보이는 구성블록을 이용하여  $\xi$ 축 및  $\eta$ 좌표축 모두에 대하여 대칭인 경우만을 다루었다. Fig.2.3에서 분할된 평판의 경계에 표시된 마주하는 두 원이 위치하는 경계를 슬립전단조건(slip-shear condition)이라 정의하자.[9] 이는 대칭인 모드에 사용되며 끝 단면에 법선방향으로 기울기가 0이며, 변에서 연직반력 또한 작용하지 않음을 나타낸다. 이로써 앞에서 언급한 두 경계조건과 더불어 세가지 경계조건이 구성되었음을 알 수 있다. 네 번째 경계조건은  $\eta=0$ 을 따라 분포하는 조화굽힘모멘트로서 식(2.4)과 같이 급수전개항으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[ Y_m(\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \right] + \nu\phi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ Y_m(\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \right]_{\eta=0} \\ & = -E_m \sin \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

여기까지, 모두 네 개의 경계조건을 언급하였는데, 이들을 이용하여 해에 포함된 미지 계수를 소거해 나갈 수 있고, 이들을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_1(\xi, \eta) &= \sum_{m=1,3,5}^k \frac{E_m}{(\beta^2 + \gamma^2) \cos \gamma_m} \\ & \times \left[ \cos \gamma_m(1-\eta) - \frac{\cos \gamma_m}{\cosh \beta_m} \cosh \beta_m(1-\eta) \right] \sin \frac{m\pi\xi}{2} \\ & - \sum_{m=k+2}^{2k-2} \frac{E_m}{\beta_m^2 - \gamma_m^2} \cosh \gamma_m \\ & \times \left[ \cosh \gamma_m(1-\eta) - \frac{\cosh \gamma_m}{\cosh \beta_m} \cosh \beta_m(1-\eta) \right] \sin \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

두 번째  $W_2(\xi, \eta)$ 를 구할 수 있다. 구성블록에 관해서도 첫 번째와 동일한 방식으로 선형미분방정식에서  $W_1(\xi, \eta)$ 와  $W_2(\xi, \eta)$ 는 정확히 지배미분방정식을 만족하므로 두 해를 중첩한 해의 중첩원리를 이용하면, 앞서 구한 선형미분방정식의 해  $W(\xi, \eta)$  역시 지배미분방정식을 만족시킨다[7].

마지막으로 컴퓨터 프로그램을 이용한 고유치 및 모드형을 구하기 위한 고유치행렬은 중첩해  $W(\xi, \eta)$ 가 만족해야 할  $\phi=0$ 에서와  $\eta=0$ 에서 법선방향 기울기가 0이라는 사실을 구성블록을 중첩 적용하여 구성할 수 있는데, 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

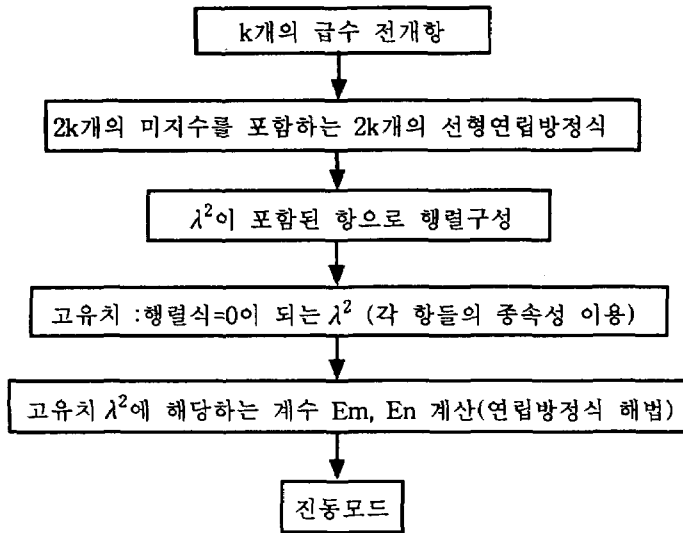
$$\frac{\partial W_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad \frac{\partial W_1(\eta, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + \frac{\partial W_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (2.6)$$

예로써 전개항의 개수 k를 3으로 하면, 식(2.6)에서 각각 3개의 연립방정식이 만들어지는데, 이 6개의 연립방정식에서 알 수 있듯이 6개의 미지수를 포함하고 있고 이는 일반 선형 (1차)제차연립방정식 해법으로 계수  $E_m, E_n$  을 이는 고유치  $\lambda^2$ 값을 찾은 후에 계산한다. 구할 수 있다.

$E_m$			$E_n$		
$m=1$	3	5	$n=1$	3	5
-	○	○	-	-	-
○	-	○	-	-	-
○	○	-	-	-	-
-	-	-	-	○	○
-	-	-	○	-	○
-	-	-	○	○	-

Fig.2.4 Schematic representation of a matrix for the doubly symmetric mode problem using three-term moment expansion

Fig.2.4에서 짧은 선으로 표시된 곳은 그 값이 존재하는 곳이며, 나머지 원으로 표시한 곳은 0을 의미한다. Fig.2.4과 같은 고유치행으로 구성된 행렬을  $A(m,n)$ 이라 두면,  $m=n=6$ 이 되며  $E_m, E_n$  앞의 각 항들이 서로 종속하는 성질을 이용하여 행렬식에 포함된 무차원 고유치  $\lambda^2$ 값을 찾을 수 있다. 즉, 행렬식의 값이 0이 되게 하는  $\lambda^2$ 값이 고유치가 된다. 고유치를 찾기 위한 단계를 요약하면 아래와 같고, 이는 컴퓨터를 이용한 수치계산에 필요한 기본 알고리즘이 된다.



· Fig.2.5 Flow chart for eigenvalue calculation

### 3. 실험

#### 3.1 실험 모델

실험적으로 고유진동수를 측정하기 위한 시편은 Fig.3.1 및 Fig.3.2와 같이 세장비(b/a) 1.0, 1.25, 1.5, 2.0의 4종류로 하였다.

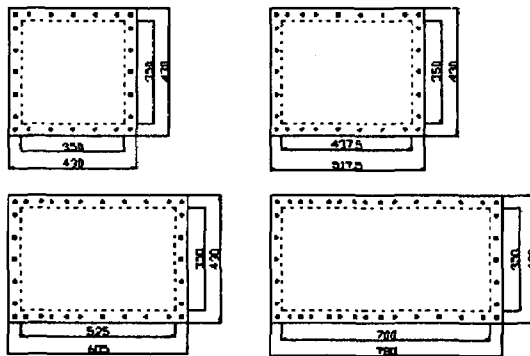


Fig.3.1 Rectangular plates and dimension



Table 3.1 Geometry and material property of vibration test model

Model	Whole Size (mmmm)	Test Size (mmmm)	Thickness (mm)	Young's Modulus(nominal value) (N/mm <sup>2</sup> )
CCCC-1	430430	350350	4.0	210000
CCCC-2	517.5430	437.5350	4.0	210000
CCCC-3	605430	525350	4.0	210000
CCCC-4	780430	700350	4.0	210000

Table 3.1은 실험에 사용된 4가지 평판의 치수 및 재료특성을 보여준다. 평판의 크기는 얇은 판의 두께비와 고정지지용 블록을 고려하여 판의 두께를 4mm로 하였고, 한 변의 길이는 350mm로 고정하고 이동블록을 움직여 세장비를 변화시키게 고안하였다. 그리고 4변의 고정지지를 위한 볼트 체결부위를 적용하여 평판의 일정 변의 총길이를 430mm로 하였다. 평판의 재질은 등방성 연강(Mild Steel)을 사용하였다.

### 3.2 실험장치

실험장치는 고정지지용 블록과 진동분석장치로 구성되어 있다. 시편을 네 변 고정지지하기 위한 블록은 Fig.3.2와 같이 한 변을 고정할 위치에 그 위치가 세장비에 따라 변하는 이동블록을 제외한 고정블록(가로세로높이 ; 780mm 430mm 190mm) 와 이동블록 (가로세로 높이 ; 350mm 40mm 150mm) 및 길이방향 고정판(가로 세로높이 ; 780mm40mm12mm) 2개와 폭 방향 고정판(가로세로높이 ; 350mm40mm12mm) 2개로 되어 있다. 블록의 윗면에는 평판을 고정시키도록 40개의 암나사가 가공되어 있다.

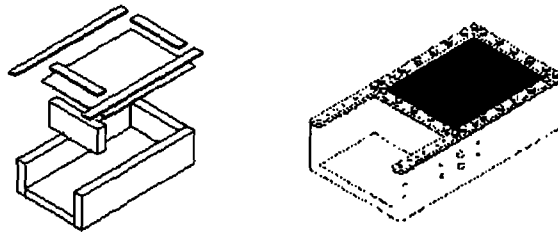


Fig.3.2 Model for experiment

진동분석장치는 주파수분석기, 충격해머, 가속도계로 되어 있다. 실험에 사용된 주파수분석기는 B&K사의 Signal Analyzer Type3550으로 허용주파수 분석범위가 1.56Hz-25.6kHz이다. 입력신호로서 충격가진을 주기 위하여 힘변환기(Force Transducer) Type8200이 부착된 B&K사의 충격해머 Type8202를 사용하였고, 판의 진동 응답신호를 측정하기 위하여 B&K사의 Type4379 가속도계를 적용하였다. Fig.3.3 및 Fig.3.4는 실험준비 세팅이 완료된 상태를 나타내고 있다.

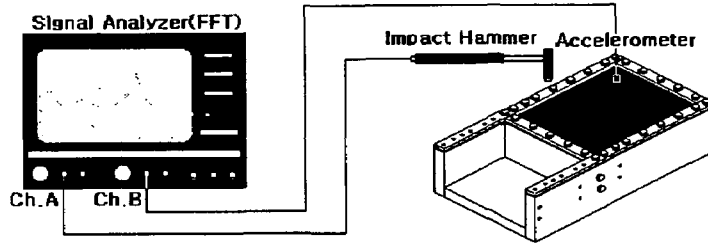


Fig.3.3 Experimental set-up



Fig.3.4 Photograph of experimental set-up

### 3.3 실험방법

실험방법은 구조물에서 좋은 주파수 응답을 얻기 위한 가장 단순하고 쉬운 방법인 충격 가진 실험으로 하였다. 이 방법의 유용성은 충격에너지가 모든 주파수 범위에서 연속적으로 분포하므로 관심 있는 주파수 범위내에 있는 모든 고유진동수에 가진 된다는 사실이다[10].

실험상의 고유진동수는 충격가진력에 응답하는 평판의 가속도를 주파수 분석하여 구한다. 충격가진력이 입력신호가 되고 시편의 응답 가속도가 출력신호로 되어 주파수 분석된 전달함수 즉, Fig.3.5에서와 같은 주파수응답함수(Frequency Response Function)의 극점 (peak point)이 각 모드별 고유진동수로 정의된다.

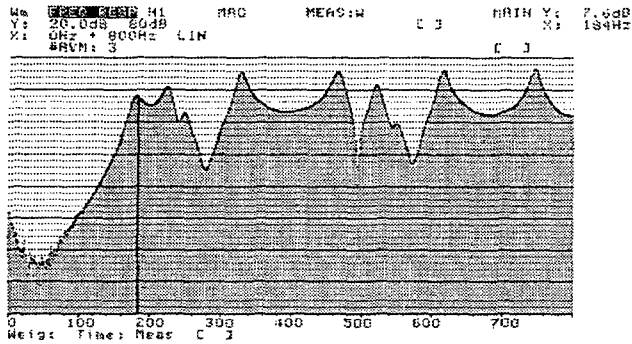


Fig.3.5 Magnitude of Frequency Response Function

13

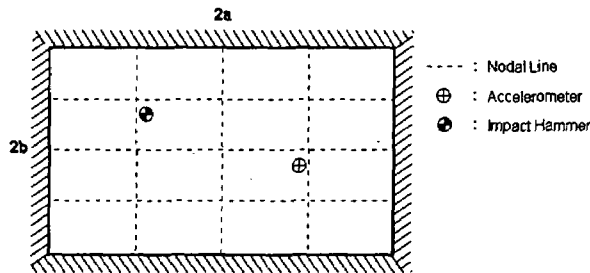


Fig.3.6 Position of the accelerometer and impact hammer

충격가진 실험 시 가속도계 고정 위치 및 충격해머 가진 위치는 Fig.3.6에서와 같이 상용구조해석 프로그램인 ANSYS를 사용한 유한요소해석의 모드형상 결과로부터 절선(Nodal Line)의 형태를 파악한 후 각 모드별 절선을 제외한 위치로 정하였다. 입출력 신호의 잡음을 줄이기 위하여 3회의 충격가진 신호를 평균하였는데, 코히런스함수(Coherence Function)를 이용하여 찾고자 하는 고유진동수 구간의 선형반응의 정도를 확인하여 그 신뢰성을 판단하였다.

주파수 분석범위는 일반적으로 여러 참고 문헌에서 제시하는 6차 이하에 근거하여 2kHz 이하로 결정하였다. 주파수 분석기를 사용하여 선택된 주파수 범위로부터 자동적으로 입출력 신호를 받아들여 200Hz구간을 줌분석(Zoom Analysis)하였는데, 커서의 이동간격이 800line이므로 주파수 분석결과로 추정된 고유진동수의 오차범위는 0.25Hz이 된다.

이러한 방법으로 고정 지지된 평판에 충격가진을 주어 주파수 분석된 전달함수로부터 1차에서 6차까지의 고유진동수를 구하였다.

### 3.4 실험결과

4가지 세장비에 관하여 사변고정지지 평판의 충격가진을 이용한 모달해석 실험을 통해 주파수 분석된 전달함수로부터 다음과 같이 1차에서 6차까지의 고유진동수를 구하였고, 그 결과는 Table 3.2와 같다.

Table 3.2 Experimental results of the plate modal analysis

Mode	Model			
	CCCC-1 (Hz)	CCCC-2 (Hz)	CCCC-3 (Hz)	CCCC-4 (Hz)
1	257	214	200	180
2	529	397	331	250
3	533	506	491	329
4	787	646	498	493
5	941	660	599	522
6	981	923	767	551

### 4. 계산결과에 관한 고찰

컴퓨터를 이용한 계산에 있어, MATLAB 언어로 코딩하여 계산을 수행하였다. 포트란 언어 보다 많은 내장함수를 지원하는 언어로, 코딩에 있어 간략화를 꾀하였다. 반면, 계산 속도에 있어서는 FORTRAN언어 보다 늦어 계산 시간상 약점을 보완하기 위하여 MATLAB Compiler를 사용해야 한다[11][12].

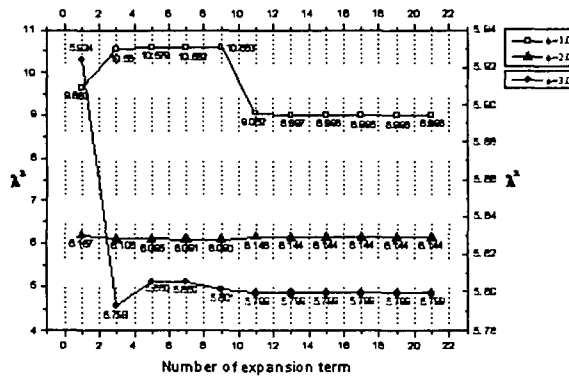


Fig.4.1 Eigenvalue versus the number of terms in expansions

Fig.4.1은 수렴확인을 위한 그림으로 각 세장비에 따라 수렴하는 전개항을 파악한 후 전개항의 개수 k를 결정하였는데, 전체적으로 k가 15이상부터 수렴하였으므로 k=15로 결정하여 프로그램 입력 값으로 사용하였다.

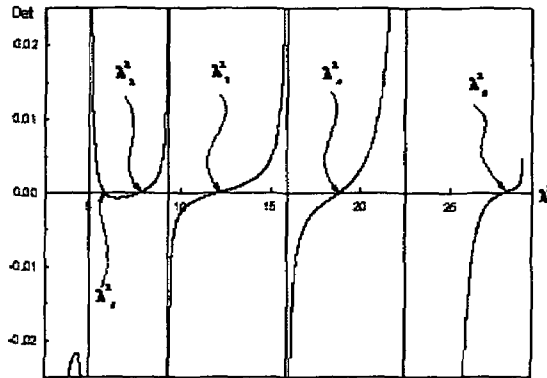


Fig.4.2 Eigenvalue versus the determinant

Fig.4.2는 1/1000간격으로  $\lambda^2$ 을 증가시키며 계산한 행렬식 값으로써, 그 값이 0에 해당하는 값들을 차례로 찾았다.

#### 4.1 고유진동수

Table 4.1은 세장비 1.0, 1.25, 1.5, 2.0에 대하여 계산한 고유진동수를 Gorman[5], Leissa[4]에 의해 소개된 해와 상용프로그램인 ANSYS에 의한 수치해 그리고 실험을 통해 얻은 결과치를 무차원화하여 서로 비교 검토하였는데, 고유진동수 6차 까지를 비교하였으며 Leissa와의 비교치는 문헌에서 제공된 세장비 1.0, 1.25 에서만 수행하였다. Table 4.2는 세장비 1.0에서 0.25간격으로 3.25까지의 세장비에 대해 각각 10차까지 무차원 고유치를 테이블로 정리하여 계산에 직접 활용할 수 있게 하였다. Table 4.1과 Table 4.2의 모드형에서 ss는  $\xi, \eta$  두 축 모두에 관해서 대칭을 나타내고, aa는 두 축 모두에 관해서 비대칭, 그리고 sa는 축에 관해 대칭이고 축에 관해서는 비대칭을 나타내며, as는 그 반대의 경우이다. Table 4.1과 Table 4.2 두 테이블에서의 무차원 고유치  $\lambda^2$ 은  $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$ 을 나타낸다.

Table 4.1 Compar  $\lambda^2$  for various aspect ratioison of eigenvalues

Aspect ratio(b/a)=1.0						
Mode	Author	Gorman	Leissa	ANSYS	Experiment	Mode shape
1	8.996	8.996	8.996	8.98	8.06	ss
2	18.35	18.35	18.35	18.30	16.66	sa
3	18.35	18.35	18.35	18.30	16.79	as
4	27.00	27.05	27.15	26.92	24.79	aa
5	32.97	32.98	32.90	32.78	29.86	ss
6	32.97	32.98	33.05	32.94	30.74	ss

(continued)

Table4.1 (continued)

Aspect ratio (b/a)=1.25						
Mode	Author	Gorman	Leissa	ANSYS	Experiment	Mode shape
1	7.472	7.472	7.472	7.462	6.68	ss
2	13.13	13.13	13.13	13.09	12.47	sa
3	17.11	17.13	17.13	17.09	15.87	as
4	22.305	22.31	22.31	22.24	20.41	aa
5	22.314	22.34	22.34	22.25	20.69	ss
6	30.986	31.08	31.08	30.91	32.09	ss

Aspect ratio (b/a)=1.5					
Mode	Author	Gorman	ANSYS	Experiment	Mode shape
1	6.751	6.736	6.721	6.2	ss
2	10.43	10.43	10.34	10.39	as
3	16.522	16.53	16.42	15.5	sa
4	16.63	16.63	16.47	15.68	ss
5	19.93	19.95	24.94	18.8	aa
6	25.2	25.2	25.35	24.06	as

Aspect ratio (b/a)=2.0					
Mode	Author	Gorman	ANSYS(C)	Experiment	Mode shape
1	6.144	6.12	6.124	5.67	ss
2	7.956	7.96	7.908	7.84	as
3	11.192	11.19	11.1	10.27	ss
4	15.83	15.83	15.69	15.53	as
5	15.992	16.00	15.92	16.31	sa
6	17.795	17.77	17.61	17.23	aa

Table 4.1에서 알 수 있듯이 각 세장비에 따른 무차원 고유치들을 비교해 본 결과, 본 논문에서 계산한 계산치와 Gorman, Leissa가 제공한 계산치 및 ANSYS에 의한 수치해를 무차원화 시킨 값들은 서로 1% 미만의 적은 오차를 보이고 있어서, 서로 잘 일치함을 알 수 있었다.

실험치와 비교해 보면 세장비 1.0에서 1차의 경우, 실험치와 계산치의 오차는 약 10%, 2차에서 6차까지 각각 9%, 8.5%, 8.2%, 9.4%, 6.7%의 오차를 보이며 전반적으로 실험치가 이론치 보다 약 8.6% 작은 값을 나타내었다. 세장비 1.25에서도 마찬가지로 실험치가 전반적으로 약 7.5%의 오차를 보이며 작은 값이 나왔고, 세장비 1.5에서는 평균 5%의 오차를 보였으며, 세장비 2.0에서는 평균 4%의 오차를 보였다.

이처럼 실험치와 이론치 사이의 오차가 생기는 요인을 실험에 초점을 맞추어 살펴보면, 사용된 재료 두께의 불균일성, 고정경계조건을 구현함에 있어서의 볼트고정방식의 불완전성 등을 들 수 있는데, 특히 저차 진동형에서는 주변 지지상태 및 지지를 자체의 영향이 크게 작용한 것으로 생각된다.

Table 4.2 Computed eigenvalues for C-C-C-C rectangular plate,  $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/d}$

Aspect ratio (b/a)=1.0		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	8.996	Ss
2	18.31	Sa
3	18.35	As
4	27.00	Aa
5	32.97	Ss
6	32.97	Ss
7	41.23	Sa
8	41.25	As
9	52.60	Sa
10	52.63	As

Aspect ratio (b/a)=1.25		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	7.472	ss
2	13.13	sa
3	17.11	as
4	22.31	aa
5	22.31	ss
6	30.99	ss
7	31.88	sa
8	34.80	as
9	36.89	sa
10	43.25	as

Aspect ratio(b/a)=1.5		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	6.751	Ss
2	10.43	As
3	16.522	Sa
4	16.63	Ss
5	19.93	Aa
6	25.2	As
7	25.72	Sa
8	31.324	Ss
9	33.989	Aa
10	34.66	As

Aspect ratio (b/a)=1.75		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	6.368	ss
2	8.893	as
3	13.290	ss
4	16.193	sa
5	18.587	aa
6	19.502	as
7	22.681	sa
8	27.386	ss
9	28.578	aa
10	31.009	ss

Aspect ratio (b/a)=2.0		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	6.144	Ss
2	7.956	As
3	11.192	Ss
4	15.83	As
5	15.992	Sa
6	17.795	Aa
7	20.79	Sa
8	21.813	Ss
9	25.174	Aa
10	29.09	As

Aspect ratio (b/a)=2.25		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	6.004	ss
2	7.356	as
3	9.806	ss
4	13.38	as
5	15.86	sa
6	17.217	aa
7	18.037	ss
8	19.543	sa
9	22.914	aa
10	23.735	as

(continued)

Table 4.2(continued)

Aspect ratio (b/a)=2.5		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	5.911	Ss
2	6.952	As
3	8.854	Ss
4	11.67	As
5	15.374	Ss
6	15.769	Sa
7	16.847	Aa
8	18.68	Sa
9	19.94	As
10	21.342	Aa

Aspect ratio (b/a)=2.75		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	5.846	ss
2	6.669	as
3	8.179	ss
4	10.434	as
5	13.437	ss
6	15.703	sa
7	16.574	aa
8	17.161	as
9	18.061	sa
10	20.213	aa

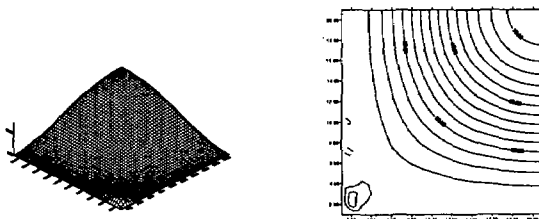
Aspect ratio (b/a)=3.0		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	5.799	Ss
2	6.465	As
3	7.685	Ss
4	9.523	As
5	11.991	Ss
6	15.08	As
7	15.655	Sa
8	16.374	Aa
9	17.601	Sa
10	18.76	Ss

Aspect ratio (b/a)=3.25		
Mode	Eigenvalue	Mode shape
1	5.764	ss
2	6.312	as
3	7.317	ss
4	8.832	as
5	10.890	ss
6	13.469	as
7	15.617	sa
8	16.222	aa
9	16.579	ss
10	17.252	sa

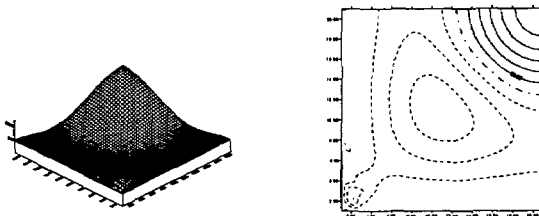


## 4.2 진동모드

Fig.4.3~Fig.4.5는 Table.4.2에서 세장비=1.0인 경우 각 차수별 진동형을 10차까지 나타내었다. 각 방향으로 21 눈금로 나누어, 모드형 별로 3D Plot, 2D Contour Plot으로 각각 표현하였다. 2D Contour Plat에서 실선은 양의 값, 일점 쇄선은 기준값, 점선은 음의 값을 각각 나타낸다.

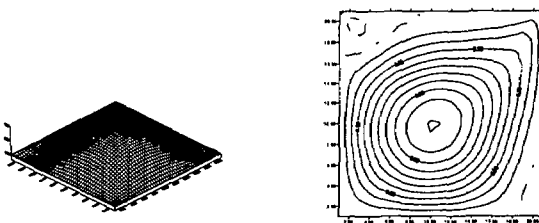


1st mode(ss)



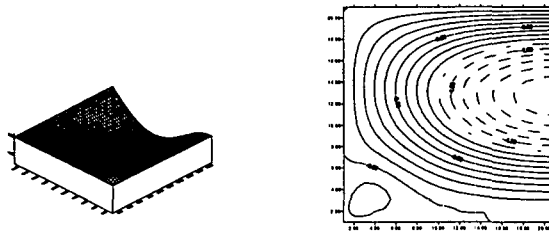
5th, 6th mode(ss)

Fig.4.3 ss(symmetric-symmetric) mode shape

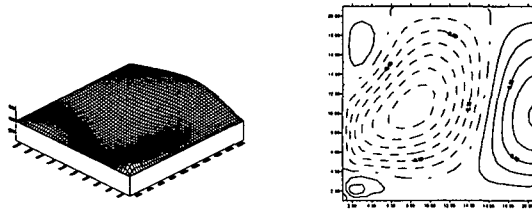


4th mode(aa)

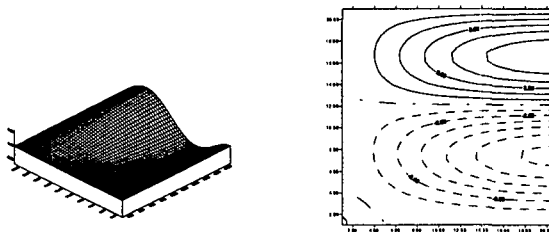
Fig.4.4 aa(antisymmetric-antisymmetric) mode shapes



2nd, 3rd mode(sa, as)



7th, 8th mode(sa, as)



9th,10th mode(sa, as)

Fig.4.5 sa(symmetric-antisymmetric) mode shapes and  
as(antisymmetric-symmetric) mode shapes

## 5. 결론

본 연구에서는 중첩법을 이용한 네변고정 직사각형 평판의 진동해석을 수행하였고, 다양한 세장비에 따른 무차원 고유진동수를 계산하였고, 3차원모드형상 및 contour plots을 제시하였다. 해석을 수행한 결과와 타 문헌자료 및 ANSYS에 의한 수치해석 결과 그리고 실험을 통한 결과치를 서로 비교하였고, 해석과정 및 결과에서 중첩법의 장점을 확인하였다. 이들을 종합하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 실험 결과의 무차원값과 이론치를 비교해 본 결과, 전반적으로 실험치가 이론치 보다 평균 6.3%정도 낮은 값을 보였다. 이는 용접구조가 아닌 1열의 볼트 고정방식의 불완전한 경계조건 및 실험에 사용된 평판치수의 불균일에서 오는 오차에 기인한다고 판단된다. 따라서 고정경계조건을 가능한 만족하기 위해 용접형이거나 볼트를 2~3열로 고정시키면 실험결과와 이론치의 차이는 크게 줄 것으로 생각된다.
- (2) 중첩법에 의해 계산된 무차원 고유진동수들은 타 문헌자료 및 유한요소해석에 의한 값과 비교한 결과, 전반적으로 1%미만의 차이로 좋은 일치율을 보였다. 따라서 이 해석 방법은 임의의 세장비에 대하여 사변고정의 경계조건을 가진 등방성평판의 고유진동수를 이론적으로 정확히 계산하는데 유용할 것으로 본다.
- (3) 컴퓨터를 이용한 수치계산에서 무차원해는 급수전개항이 15개 이상부터 수렴을 하였으며, 다른 모드형에서도 마찬가지로 결과를 보였다. 이를 통해서 살펴본 결과, 본 연구에서 사용한 중첩법을 이용하고, 디지털 컴퓨터를 사용하여 계산하면 수렴이 빠르고, 급수항의 개수에 따라 정밀도에 매우 근접할 수 있는 정밀해석법으로 그 유용함을 확인하였으며, 일반적인 모든 평판의 경계조건에 적용이 가능한 장점이 있음을 확인하였다.
- (4) 본 논문에서 제시된 결과들은 네변고정 직사각평판의 고유진동수를 직접 계산할 수 있는 설계자료가 될 것으로 믿어진다.

결론적으로, 본 연구의 고정지지 등방성 평판의 고유치 해석법은 다른 경계조건을 가진 등방성 평판 고유치 문제의 정밀해석과 더 나아가 이방성 평판 진동해석의 기초가 될 것이다.

## 참고문헌

1. 한국선급, "선박 진동·소음 제어지침", 한국선급, pp.191~192, 1997.
2. 金極天, 丁泰榮, 直四角形板의 振動解析, 大韓造船學會誌 第14卷 第1號, pp.1~10, 1977.
3. Nack Joo Lee and Chan Hong Yum, "Free Vibration Analysis of a Rectangular Plate Clamped on Three Edges and Free on the Fourth Edge", 韓國航空宇宙學會誌 第9卷 第2號, pp.9~12, 1981.12.
4. Leissa, A. W., "Vibration of Plates", National Aeronautics and Space Administration Rep. No. NASA SP-160, 1969.
5. Gorman, D. J., "A Comprehensive to the Free Vibration Analysis of Rectangular Plates by Use of the Method of Superposition", Journal of Sound and Vibration 47, pp.126~128, 1979.
6. Timoshenko, S. P. and Woinowsky K. S., "Theory of Plates and Shells : second edition", McGraw-Hill, 1959.
7. Rudolph Szilard, "Theory and Analysis of Plates : Classical and Numerical Methods", Prentice-Hall, 1974.
8. Troitsky, M. S., "Stiffened Plates : Bending, Stability and Vibrations", Elsevier

Scientific Publishing Company, 1976.

9. Groman, D. J., "Accurate Free Vibration Analysis of Point Supported Mindlin Plates by The Superposition Method", Journal of Sound and Vibration 47, pp.265~277, 1999.
10. Halvorson, W. G. and Brown, D. L., "Impulse Technique for Structural Frequency Response Testing", Sound and Vibration, November, pp. 8~21, 1977.
11. Duane Hanselman and Bruce Littlefield, "Mastering MATLAB 5 : A Comprehensive Tutorial and Reference", Prentice-Hall, 1998.
12. Chapman, S. J., "MATLAB : Programming for Engineers", Brooks/Cole, 2000.