

等方彈性 半無限體上의 板의 解析

金 聰 得*

土木工學科

(1981. 4. 10 접수)

〈要 約〉

Isoparametric 要素를 使用한 有限要素法에 依한 等方彈性 半無限體上의 板子조물의 解析方法을 提示하고 있는 本 論文은 基礎를 정확하고 경제적으로 設計하기 위한 土質과 構造物의 相互影響에 對한 研究를 보여 주고 있다.

等方彈性 半無限體上의 板의 刚度는 板子조물의 刚度에 各 節點의 基礎에 對한 刚度常數를 合해주면 된다.

Plate Bending Analysis on Isotropic Elastic Half-space

Kim, Sung Deuk

Dept. of Civil Engineering

(Received April 10, 1981)

〈Abstract〉

An analysis of plate bending on isotropic elastic half-space is solved by the finite element method with isoparametric element. This investigation represents a study of soil-structure interaction aimed to increase structural and economic efficiency in the design of basements.

The stiffness coefficients of the foundations at the various nodes are added to those of the plate bending.

I. 序 論

最近에 행하여지는 構造物의 應力解析은 上部 빼
내구조는 電算으로 處理되고 下部의 基礎는 그렇게
하지 않는 수가 많다. 상부구조나 하부구조는 서로
一體로 되어있고 그 力學的 機能도 사실상 전체구
조물을 一體로 보아야 正當하게 評價될 수 있겠다.

彈性地盤上에 놓인 보를 解析하는데 連續體 혹은
Winkler type로 取扱하는 方法에 關해서 Hetenyi,
Chai, Zemochkin,⁽¹⁾ 趙⁽²⁾ 以外 많은 사람들에 依
해서 광범위하게 調査되었고, 弹性地盤上에 놓인 板
이나 텅크 等의 解析에 對해서는 Naghdi, Rowley,
Frederick⁽³⁾가 Winkler type의 地盤上에 놓인 板

의 解析을 하였으며, Aleen 와 Severn⁽⁴⁾는 同一한
問題를 보다 複雜한 境界條件에 對해서 2階微分方
程式을 relaxation 하므로서 解決했으며, James⁽⁵⁾
는 有限差分法에 依해서 半無限彈性體上에 놓인 矩
形板을 解析했다. 그 外에도 Brebbia, Mallet,
Schmit, Turner, Henry⁽⁶⁾ 等에 依해서 유사한 研究가
수행되었으며, Cheung 와 Zienkiewicz⁽⁷⁾는
彈性地盤上의 板을 4-Nodes 矩形要素를 利用한 有
限要素法으로 解析하였다.

本 論文은 Isoparametric 要素를 使用한 板의 有
限要素 解析에 等方彈性半無限體(Isotropic elastic
half-space) 基礎地盤을 適切하게 連結시키는 內 그
主眼點이 있다 하겠다.

*一名: 金聲九

II. 基礎地盤의 剛度

地盤위의 構造物에 어떤 外力이 作用하면 그 構造物內의 應力은 地盤의 變形의 影響을 받으며 基礎의 應力分布는 地盤과 板의 相對剛度의 影響을 받는다. 따라서 板과 地盤사이의 相互作用(interaction)을 考慮한 解析方法이 要求되어진다. 且共 弹性地盤上에 놓인 板의 解析에 있어서 2가지 假定⁽⁷⁾이 導入된다. 즉

가) 負의 反力이 存在할 때 地盤과 板사이의 分離現象이 일어나지 않는다는.

나) 인접하는 節點間에 相互作用이 없고 個個의 스텝ing으로 作用한다.

두번째 假定은 자주 使用되고는 있으나 實際는 있을 수 없는 것으로서 이것이 소위 Winkler type의 基礎로지 假想的인 假定에 不過하며 實際는 많은 誤差가 同伴되었다.

基礎地盤을 어떤 節點 주변의 地盤面積에 對해서 荷重의 作用으로 均等하게 沈下한다는 Winkler 基礎地盤과는 달리 等方彈性半無限體 基礎地盤에 對해서 알아 보기로 하자.

飽和된 粘性土에 荷重이 순간적으로 加해지면 間隙水의 이동을 일으키지 않고 變形을 일으키는데 이를 即時沈下라 한다. 또한 球化屈曲의 압축율은 0이라 할 수 있으므로 이러한 沈下는 곧 剪斷에 依한 沈下라고도 할 수 있다.⁽⁸⁾

집도층에 있어서 剪斷應力의 작다고 假定하면 剪斷變形度는 剪斷應力에 比例한다고 볼 수 있으며 이러한 假定과 時間에 無限한 性質로부터 1885年 Boussinesq⁽⁹⁾는 차음으로 均一하고 半無限彈性體上에서 Fig. 1에서 보는 바와 같이 i 點에 作用하는 集中荷重 P_i 때문에 n 點에 생기는 變形은 近似的으로

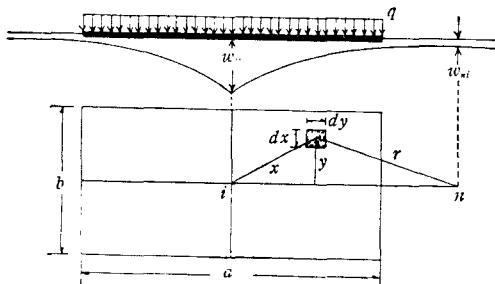


Fig. 1. Isotropic Elastic Half-space.

다음과 같음을 유도하였다. 즉

$$W_{ni} = \frac{q(1-\nu_0^2)}{\pi E_0 \gamma_n} \quad (1-a)$$

$$= \frac{P_i(1-\nu_0^2)}{ab\pi E_0 \gamma_n} \quad (1-b)$$

여기서

P_i : 節點 i 에 作用하는 集中荷重

q : 集中荷重이 결점 주변의 矩形領域에 等分布된다고 가정하는 압축율으로 P_i/ab 이다.

ν_0 : 基礎地盤의 Poisson 比

E_0 : 基礎地盤의 Young 係數

γ_n : i 點과 n 點 사이의 距離

a : 基礎地盤 影響領域의 短 변 길이

b : 基礎地盤 影響領域의 長은 변 길이

萬一 i 點에 作用하는 荷重으로 因해서 i 點에 생기는 變位를 구하고자 한다면 式(1)은 γ_n 이 0이 되므로 變位는 無限大로 되는 모순이 생기므로 다음과 같이 생각할 수 있다.

한 節點 주위의 小領域 全體에 等分布된 荷重을 받는 圖心에서의 變形은 그 領域의 全面積에 乘쳐서 式(1)을 積分하므로서 얻을 수 있다. 즉,

$$W_{ii} = \int_{A_i} \frac{P_i(1-\nu_0^2)}{ab\pi E_0 \gamma_n} dA \quad (2)$$

$$= 2 \int_{x=0}^{x=a/2} 2 \int_{y=0}^{y=b/2} \frac{P_i(1-\nu_0^2)}{ab\pi E_0} \cdot \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ = \frac{P_i(1-\nu_0^2)}{aE_0} \times -\frac{4}{b\pi} \iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3)$$

$$= \frac{P_i(1-\nu_0^2)}{aE_0} I_w \quad (3)$$

$$= \frac{P_i(1-\nu_0^2)}{a\pi E_0} f_{ii} \quad (4)$$

여기서

$$I_w = \frac{4}{b\pi} \iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (5)$$

$$f_{ii} = \frac{4}{b} \iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (6)$$

따라서

$$I_w = \frac{1}{\pi} f_{ii} \quad (7)$$

I_w 와 f_{ii} 는 基礎地盤의 形狀과 刚性에 關係된 影響係數(influence factor)로서 Steinbrenner⁽¹⁰⁾는 $a \times b$ 크기의 矩形地盤에서 모서리 部分에 對한 I_w 를 다음과 같이 提案했다.

$$I_w = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{a}{b} \log \left[\frac{1 + \sqrt{(a/b)^2 + 1}}{a/b} \right] \right. \\ \left. + \log \left[\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} \right] \right\} \quad (8)$$

基礎地盤 中央點의 I_w 는 두 모서리部分의 값을 합한 것이며 各種形狀에 對한 I_w 值⁽¹⁰⁾가 Table. 1에 주어져 있다.

Table 1. Influence Factor, I_w

Shape	Flexible			Rigid
	Center	Corner	Average	
Circle	1.0	0.64	0.85	0.88
Square	1.12	0.56	0.95	0.82
Rectangle 1.5 $\left(\frac{a}{b}\right)$	1.36	0.68	1.15	1.06
2	1.53	0.77	1.30	1.20
5	2.10	1.05	1.83	1.70
10	2.54	1.27	2.25	2.10
100	4.01	2.00	3.69	3.40

影響係數 f_{ii} 에 對해서는 Cheung⁽⁷⁾은 몇 가지 b/a 比에 對한 f_{ii} 值를 表로서 提示했으나 여기서는 式(6)을 直接 積分하였다.

$$f_{ii} = \frac{4}{b} \int_0^{\frac{a}{b}} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b} \left[\int_b^{\sqrt{a^2+b^2}} \log(t+b) \frac{t}{\sqrt{t^2-b^2}} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_b^{\sqrt{a^2+b^2}} \log(t-b) \frac{t}{\sqrt{t^2-b^2}} dt \right] \\ &= \frac{1}{b} \left[a \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{\sqrt{a^2+b^2}-b} \right. \\ &\quad \left. + 4b \log \left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+b} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-b} \right) - 4b \log \sqrt{2b} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

載荷面積 上의 任意點의 變位도 同一한 方法으로 積分을 하여 구할 수 있지만 式(1)로 구한 값과 比較해 볼 때 充分한 精度를 갖는 값을 구할 수 있기 때문에 分(2)의 積分式을 使用하는 것 보다는 式(1)에 依해서直接 구하는 것이 便利하다.

그러므로 節點부근의 基礎地盤에 對한 沈下量은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{11} + W_{21} + W_{31} + \dots \\ &= \frac{(1-\nu_0^2)f_{11}}{a_1\pi E_0} P_1 + \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \cdot \gamma_{21}} P_2 \\ &\quad + \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \cdot \gamma_{31}} P_3 + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

$$W_2 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{12}} P_1 + \frac{(1-\nu_0^2)f_{22}}{a_2\pi E_0} P_2 + \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{32}} P_3 + \dots$$

$$W_3 = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{13}} P_1 + \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{23}} P_2 + \frac{(1-\nu_0^2)f_{33}}{a_3\pi E_0} P_3 + \dots$$

매트릭스 形態로 쓰면

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_0^2)f_{11}}{a_1\pi E_0} & \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{21}} & \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{31}} & \dots \\ \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{12}} & \frac{(1-\nu_0^2)f_{22}}{a_2\pi E_0} & \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{32}} & \dots \\ \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{13}} & \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \gamma_{23}} & \frac{(1-\nu_0^2)f_{33}}{a_3\pi E_0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (11)$$

즉,

$$[W] = [F_f] [P] \quad (12)$$

여기서

$$[F_f] = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \begin{bmatrix} \frac{f_{11}}{a_1} & \frac{1}{\gamma_{21}} & \frac{1}{\gamma_{31}} & \dots \\ \frac{1}{\gamma_{12}} & \frac{f_{22}}{a_2} & \frac{1}{\gamma_{32}} & \dots \\ \frac{1}{\gamma_{13}} & \frac{1}{\gamma_{23}} & \frac{f_{33}}{a_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (13)$$

$[F_f]$ 는 基礎地盤의 柔軟度매트릭스(Flexibility matrix)로서 대칭매트릭스이지만 BAND 매트릭스가 아님을 알 수 있다.

式(12)를 $[P]$ 에 對해서 展開하면

$$\begin{aligned} [P] &= [F_f]^{-1} [W] \\ &= [K_m] [W] \end{aligned} \quad (14)$$

$[K_m]$ 은 유연도매트릭스의 逆매트릭스이며 板과의 連結을 고려할 때 變位 $[\delta]$ 중에서 처짐 W 만 있고 θ_x, θ_y 는 무시해도 될 정도이므로 式(14)는 아래와 같이 확장시킬 수 있다.

$$[F_m] = [K_m] [\delta] \quad (15)$$

$[K_m]$ 은 $[K_m]$ 을 확장시킨 地盤의 刚度매트릭스이다.

III. 板과 基礎地盤의 連結

Fig. 2와 같이 基礎를 4個의 要素로 分할하고 板

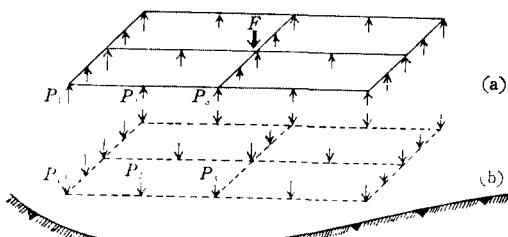


Fig. 2. Plate on Half-space.

과 基礎地盤으로 나누었을 때 Fig. 2-(a)에서 外의荷重 F 에 依한 反力 P_i 는 板理論으로 구할 수 있다. 이 反力 P_i 를 逆方向으로 하여서 Fig. 2-(b)의 基礎地盤의 節點荷重 P_i 로 생각하여서 式(14)에 適用한다. 이때 基礎地盤의 節點에 作用하는 荷重 P_i 로 因하여 沈下하는 地盤의 節點 주변의 領域은 Fig. 3과 같이 길이 $a_i \times b_i$ 인 矩形으로 생각할 수 있다. 그런데 要素가 4-Node 일 때는⁽¹⁾ 지반영향 領域의 할당에 애로점이 없으나 8-Node 일 때는 빛금친 中央部分의 基礎의 効果를 어느 節點의 矩形領

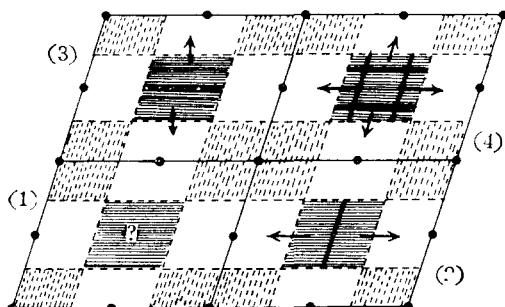


Fig. 3. 8-Node Element.

域에 配當하느냐가 問題가 된다. 여기서는 幾何學的으로 各 要素 모서리의 節點部分에 對해서는 點線으로 채워진 矩形領域으로 생각하고, 各 要素의 边界에 있는 節點部分에 對해서는 要素 2(3)과 같이 左右(上下)의 2邊上에 配當하는 方法과, 要素 4에서와 같이 길이 $a_i \times b_i$ 인 빛금부분을 4邊에 $a_i \times \frac{1}{4} b_i$ 혹은 $\frac{1}{4} a_i \times b_i$ 씩 配當하는 方法을 생각할 수 있다. 入力資料의 準備에 있어서 볼 때 要素 2에서 처럼 험이 가장 便利하다.

板구조물의 解析을 為해서는 Mindlin⁽¹¹⁾의 다음假定을 使用하여 解析한다. 즉

- 가) 板의 수직차임 (W)은 적다.
- 나) 變形前에 中面(midsurface)에 수직이었던 面은 變形後에도 平面을 維持하지만 變形後의 中面에 수직일 必要는 없다.

다) 中面에 수직한 應力은 荷重에 關係없이 無視된다.

以上의 假定으로 板의 變位는 Fig. 4에서와 같이 차짐 W 와 中面의 轉角 θ_x, θ_y 로서 定義된다. $X-Y$ 平面은 平板의 中面과 一致하고 板의 두께는 t 이며, 外力은 中面에 作用하는 것으로 생각한다.

앞의 條件에서 一般的으로 求해져있는 板의 要素

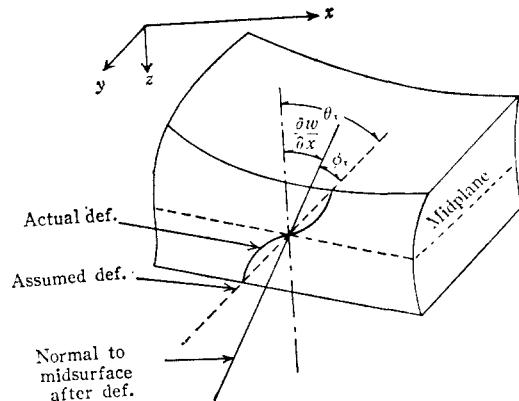


Fig. 4. Deformation of Plate.

剛度매트릭스 $[K_p^e]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[K_p^e] &= \int_{A_e} [B]^T [D] [B] dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta\end{aligned}\quad (16)$$

여기서 $[B]$ 는 Strain Matrix, $[D]$ 는 Elastic Matrix 그리고 $|J|$ 는 Jacobian Matrix이며 板解析의 詳術은 文獻^(12,13,14)을 參考하기로 한다.

일단 要素剛度매트릭스 $[K_p^e]$ 가 구해지면 板의 全體剛度매트릭스 $[K_p]$ 로 쉽게 組合할 수 있으며 板의 節點에 作用하는 荷重은 外的荷重 $[F]$ 이지만 等方彈性半無限體上의 板임을 고려하면 効果的으로 미치는 外力은 $[F] - [F_m]$ 이다. 즉,

$$[F] - [F_m] = [K_p] [\delta] \quad (17)$$

(17)式에 式(15)를 代入하면

$$[F] = [K_m] [\delta] + [K_p] [\delta]$$

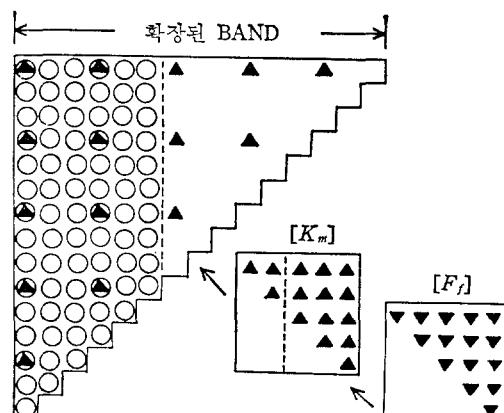


Fig. 5. Stiffness Matrix.

$$= ([K_m] + [K_p]) [\delta] \\ = [K] [\delta] \quad (18)$$

式(18)에서 $[K]$ 는 等方彈性半無限體上의 板의 剛度矩阵이다. $[K]$ 는 Fig. 5에서 보는 바와 같이組合된 帶狀의 板의 剛度矩阵를, 航空된 BAND의 개념을導入하여 地盤의 柔軟度矩阵의 逆行列을 구하여 行, 列 共히 3칸씩 걸려서 중첩시켜連立方程式的解法^(14,15)에 依하여 變位를 求하여이 값중 拘束節點에 對한 力系가 一般으로 反力이나地盤上의 板에서는 모든 節點이 有限變位를 일으키므로 對應하는 節點力系가 基礎의 相對反力이 된다. 要素內의 應力은 Gaussian point에서 구한다. 즉,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = [D] [\varepsilon] = [D] [B] [\delta^*] = [S] [\delta^*] \quad (19)$$

IV. 프로그램의 作成 및 解析例

有限要素法은 그 理論만으로는 實際應用이 되지 않으며 컴퓨터 프로그램화 됨으로서 비로서 實用化될 수 있는 바, Hinton과 Owen⁽¹³⁾이 開發한 板子조물의 解析 프로그램을 基本으로하여 等方彈性半無限體의 基礎地盤 狀態를 고려할 수 있게 發展시

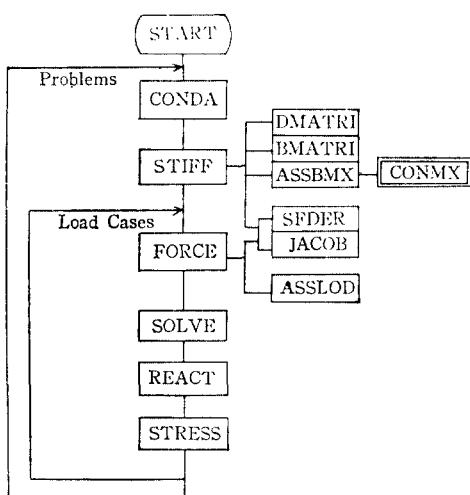


Fig. 6. General Flow Chart.

었으며, 使用한 컴퓨터機種은 IBM 360이며 FORTRAN言語로 作成된 프로그램의 Source 카드는 약 800장 정도였다.

프로그램은 大部分의 入力資料를 읽는 CONDA, 要素剛度矩阵를 만드는 STIFF, 節點荷重을 읽고 또 表面荷重을 等價節點荷重으로 計算하는 FORCE, 平衡方程式을 푸는 SOLVE, 反力を 計算하는 REACT, 應力を 計算하는 STRESS 그리고 DMATRI, SFDER, JACOB, BMATRI, ASSBMX, CONMX, ASSLOD와 같이 13個의 Subroutine 프로그램과 이들을 集成시킨 한 個의 Main 프로그램으로 構成되었으며, 이 프로그램의 General Flow Chart는 Fig. 6과 같다.

本 프로그램을 使用하여 Fig. 7과 같이 10ft × 10ft, 두께 2ft의 板이 等方彈性半無限體上에 있을 때荷重의 作用으로 因한 쳐짐과 應力を 비교 검토해보았다. 板의 포아송비 $\nu=0.3$, 탄성계수 $E=468000$ ksf, 地盤의 포아송비 $\nu_0=0.25$ 이 다.⁽¹⁶⁾

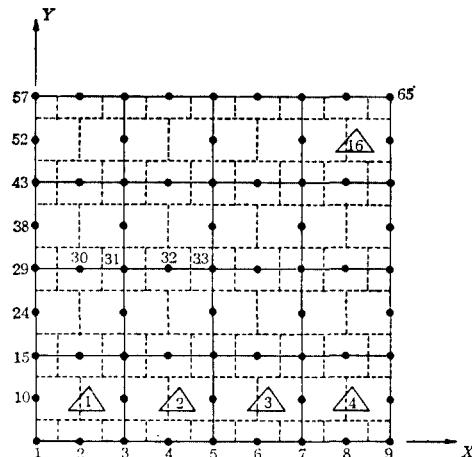


Fig. 7. Application Model.

가) 地盤의 狀態에 따른 比較

板의 中央點에 500kip의 荷重이 作用할 때 地盤의 弹性係數(E)의 變化에 따른 中心線上의 쳐짐이 Fig. 8에 나타나 있다.

나) 荷重크기의 變化

中央點에 作用하는 荷重의 크기를 變化시켜 보았을 때의 中心線上의 쳐짐이 Fig. 9에 나타나 있다. 地盤의 $E=1440$ ksf이다.

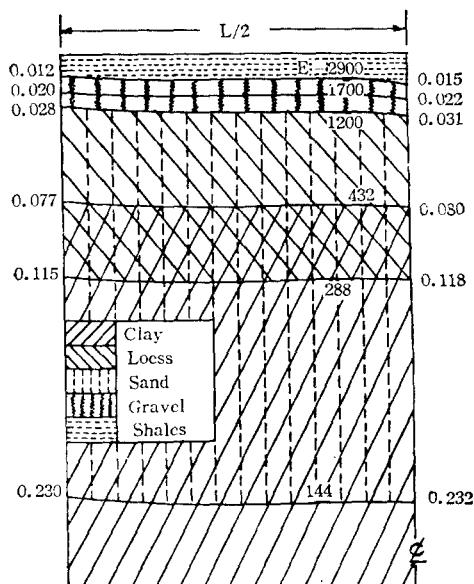


Fig. 8.

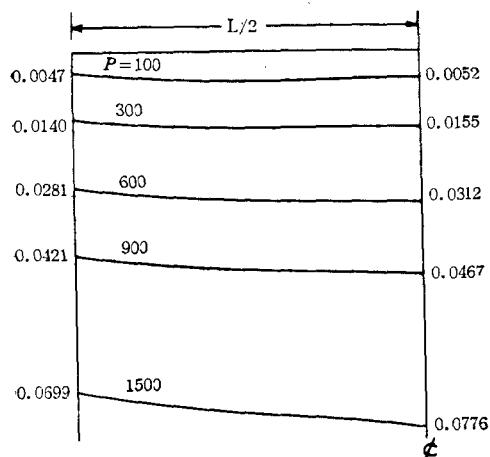


Fig. 9.

다) 板두께의 變化

中央點에 500kip의 荷重이 作用하되 板의 두께를 變化시켜 보았을 때의 처짐이 Fig. 10에 나타나 있다. 地盤의 $E=1440\text{ ksf}$ 이다.

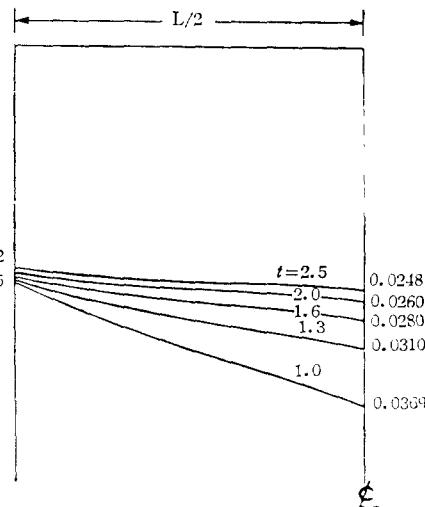


Fig. 10.

V. 結 論

가) 等方彈性 半無限體上의 板구조물의 變位와 應力を 8-Node Isoparametric 要素를 使用한 有限要素法을 利用하여 푸는 理論體系를 補完하고 그기에 따른 電算프로그램을 開發하였다.

나) 地盤의 複性質이 같을 때 Winkler 基礎에 比해 처짐이 거의 2倍이었다.

다) 같은 成分의 複이라도 弹性係數의 變化에 따른 처짐의 差異가 매우 커 있으며 따라서 보다 適合한 E 値의 선택을 要구함을 알 수 있다.

라) 板의 뚜께가 變화에 따라서 처짐이 커지며 特히 中央部에서 그 差가 현저하다.

마) 처짐은 荷重의 크기에 당연히 비례함을 확인했으며 과대한 처짐을 防止하기 위해서 正當한 板의 設計가 이루어져야 하겠다.

바) 上下부가 一體로 連結된 구조물에서 이를 分離해서 計算하는 方法을 지양하고 一體로 보고 解析하는 方法에 利用될 수 있다.

參 考 文 獻

1. Zemochkin, B. H., Practical Method of Calculating Beams and Plates on Elastic Foundations, 2nd ed. (1962).

2. 趙顯榮, 有限要素法에 係於 地中格子基礎의 解法, 釜大 附設 生產技術研究所, 第18輯, pp.45—51, (1978).
3. Frederick, D., Trans. A. S.M.E. 78, 195 (1956).
4. Severn, R.T., Proc. J. Inst. civ. Engrs. 15, 35 (1960), 20, 293 (1961).
5. James, R.L., J.P.C.A. 4, 30 (1962).
6. Henry, T.Y., Flexible Plate Finite Element on Elastic Foundation, Journal of Structural Division, pp.2083—2101 (1970).
7. Cheung, Y.K. and Zienkiewicz, O.C., Plates and Tanks on Elastic Foundations, Int. J. Solids Structure, Vol.4, pp.451—461 (1965).
8. Lambe, T.W., Method for Predicting Initial Settlement, ASCE. Vol.96, SM 2 (1970)
9. Harr, M. E., Foundation of Theoretical Soil Mechanics, pp.55—148, McGraw-Hill, (1966).
10. Bowles, J. E., Foundation Analysis and Design, 2nd. ed., pp.149—159, McGraw-Hill (1974).
11. Mindlin, R.D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Appl. Mech., 18, pp.31—38 (1951).
12. Timoshenko, S. P., Theory of Elastic Stability, 2nd. ed., pp.319—456, McGraw-Hill (1961).
13. Hinton, E. and Owen D. R. J., Finite Element Programming, Academic Press (1977)
14. Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3rd. ed., McGraw Hill (1977)
15. Bathe, K. J. and Wilson, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, pp. 239—307, Prentice-Hall (1976).
16. 金聲得, 有限要素法에 依於 全面基礎의 解析, 釜大 大學院 論文集 (1981).