

## 2차원 난류혼합층의 특성에 관한 연구

고 양 문, 임 윤 철

기계공학과

(1982.6.30 접수)

### 〈요 약〉

전단경계층을 점와류의 열로 근사시켜 수치해석하였다. 계산된 평균속도분포와 경계층 두께의 증가율은 혼합경계층에 대한 실험결과와 잘 일치하고 있으며, 경계층은 와류결합에 의하여 증가함을 확인하였다. 또 와류결합은 매우 신속하게 이루어지며, 와류결합과 와류결합 사이에는 만들어진 소용돌이가 평형상태에 도달하기에 충분한 시간여유가 있음이 밝혀졌다.

## A study on the characteristics of two-dimensional turbulent mixing layer

Koh, Yang-Moon · Rhim, Youn Chul

Dept. of Mech. Eng.

(Received June 30, 1982)

### 〈Abstract〉

Shear layer is simulated by an array of point vortices and analyzed numerically. Calculated mean velocity profile and boundary layer spreading rates are in good agreement with experimental data on mixing layers. It is confirmed that the shear layer grows by vortex pairing and that large eddies formed by vortex pairing has sufficient time to get equilibrium states before next vortex pairing processes take place.

### I. 서 론

여러 가지 가지방법(flow-visualization method)을 이용한 최근의 실험결과들은 2차원 난류혼합 경계층 내에 매우 큰 규모의 2차원 소용돌이 (large scale two-dimensional eddy)가 존재하고 있음을 보여주고 있다.

종래의 통계적 방법으로는 쉽게 측정하기가 힘든 이러한 큰 규모의 운동은 전단경계층의 성장(shear layer growth), 난류 혼합 (turbulent mixing) 및 소음발생 등에 깊이 관여하고 있는 것 같이 보이며 그 발견 이후 난류유동해석에 많은 논란을 일으켰다.

성분이 다른 두 기체의 흐름사이의 2차원 난류 혼

합 경계층에 관한 실험에서 Brown과 Roshko<sup>(1)</sup>는 2차원 와류(two-dimensional vortices)들이 서로 간격서 큰 규모의 소용돌이구조(large scale eddy structure)를 이루고 있음을 관찰하였다. 이러한 소용돌이는 거의 일정한 속도로 하류로 흘러가면서 주위의 소용돌이와 합쳐져서 커지고 소용돌이 사이의 간격도 증가하게 된다. 이때 소용돌이의 크기를 평균속도의 최대 기울기를 이용하여 정의할 때 소용돌이 사이의 간격과 크기의 비는 대략 3정도가 된다. Winant와 Browand<sup>(2)</sup>는 물의 혼합경계층 내에 염료를 주입하여 혼합층의 운동을 관찰 하였다. Freymuth<sup>(27)</sup>의 실험에서와 같이 염료는 점점 진폭이 증가하는 불안정파(unstable wave)의 모양을 나타내다가 결국 2차원 와류구조를 이루는 것이 관찰되었다. 이들 난류와류들은 서로의 주위를 선회하면서

상호작용하다가 합쳐져서 보다 큰 와류를 이루게 되고 이들 사이의 간격도 거의 두 배로증가하였다. 따라서 난류 혼합경계층은 이러한 와류결합(vortex pairing)의 반복에 의해 그 두께가 증가한다고 Winant와 Browand<sup>(2)</sup>는 결론지었다.

이와 같이 매우 규칙적인 것처럼 보이는 거시적 난류구조(large-scale turbulent structure)는 그후 많은 사람들<sup>(3-8)</sup>에 의해 확인되었으며 학자들 사이에 많은 논쟁을 불러왔다. Roshko<sup>(10)</sup>, Dimotakis와 Brown<sup>(4)</sup> 등은 이러한 거시적 구조가 난류전단류의 발달에 결정적인 역할을 한다고 주장했다. Chandrsuda<sup>(11)</sup> 등은 Brown과 Roshko<sup>(1)</sup>가 주장하는 2차원 와동구조는 층류로부터 난류로 변하는 전이구역에서 나타나는 일시적 현상으로 주류(free stream)의 난류강도가 크거나 Reynolds 수가 충분히 커서 완전 난류 유동이 되면 깨어져서 무질서적이고 3차원적인 고전적인 의미에서의 난류유동이 된다고 한데 반해서 Wygnanski<sup>(5)</sup> 등은 이러한 2차원 구조가 상당히 오래 지속된다고 주장하고 있다.

이러한 2차원 와동구조의 발견은 2차원 Euler 방정식의 해, 특히 2차원 와류들의 운동에 대한 관심을 불러 일으켰다<sup>(12)</sup>. Moor와Saffman<sup>(13)</sup>은 근사 계산을 통하여 유한단면을 가진 와류들의 무한열이 붕괴되지 않기 위해서는 와류 사이의 간격은 와류의 폭의 2.8배 이상이 되어야 함을 밝혀내고 이로부터 2차원 난류혼합층을 비회전 유동을 하는 유체 중에 잠겨 있는 유한 단면을 가진 와류의 열이라 가정하면 와류사이의 평균간격  $\lambda$ 와 혼합층의 두께  $\delta_w$  사이에는

$$\lambda/\delta_w=3.5$$

인 관계가 성립한다고 결론지었다. 한편Pierrehumbert와 Widnall<sup>(14)</sup>은 수치해석을 통하여 이들의 근사계산이 정확함을 확인하였다. 그러나 이들은 어떻게 와류들이 분해되어 인접한 다른 와류들에 흡수되는지는 설명하지 않았다.

Acton<sup>(15)</sup>은 비율로 늘어선 96개의 점와류(point vortex)들에 정현파모양의 착란을 주고 이들 점와류들의 운동을 계산하였다. 이 계산에서 그는 길폭이 점점 증가하던 정현파는 결국 깨어지고 점와류들은 두 개의 소용돌이를 이루었다가 하나로 합쳐지는 것을 볼 수 있었다. 이 때 두 개의 와류의 결합이 가능하도록 그는 인접한 정현파를 약간 어긋나게 배치하였다.

Aref와 Siggia<sup>(17)</sup>는 cloud-in-cell<sup>(18)</sup>법을 사용하여 4,096개의 점와류들의 운동을 계산하였다. 이들은 와류결합에 의해 와류의 크기가 증가하기 때문에 전단층의 두께가 증가하는 것이 아니고, 와류의 크기는 거의 변하지 않으나, 이들 와류들이 중심선으로부터 점점 떨어져 나가기 때문에 전단층이 두꺼워진다고 주장했다. 물론 와류들은 서로 결합하여 조금씩 커지기는 하지만 와류의 크기와 전단층의 두께는 비례하여 증가하지 않았다. 그리고 염료 등을 사용한 가시화실험의 결과는 와류구조의 크기를 과대 표시할 우려가 있다고 했다.

본 연구에서는 Acton이 한 것과 같이 점와류들의 위치를 하나하나 직접 계산하는 방법을 사용하여 초기 조건을 바꾸어가면서 와류의 변화를 계산하였다. 또 계산시간을 길게 하여 와류들이 Moore와 Saffman<sup>(13)</sup>의 계산결과와 같은 정상상태에 도달하는지도 검토하였다.

## II. 수학적전개와 계산방법

강도가  $K$ 인 점와류들이 일정한 간격  $\lambda$ 씩 떨어져 있을 경우 복소포텐셜  $w(z)$ 와 복소속도  $V$ 는<sup>(16)</sup> 각

$$w(z) = \frac{iK}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{\lambda}$$

$$V(z) = u - iv = -\frac{iK}{2\lambda} \cot \frac{\pi z}{\lambda}$$

와 같이 된다. 단

$$z = x + iy$$

따라서 와류강도가 모두  $K$ 로 일정하고 위치가

$$z_j = (x_j + n\lambda) + iy_j \quad \left( \begin{matrix} n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ j=1, 2, \dots, N \end{matrix} \right)$$

로 주어지는  $N$ 개의 와류에 의한 복소속도  $V$ 는

$$V(z) = -\sum_{j=1}^N \frac{iK}{2\lambda} \cot \frac{\pi}{\lambda} (z - z_j)$$

로 주어지고, 와류들의 위치는 연립미분 방정식

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = \bar{V}_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{iK}{2\lambda} \cot \frac{\pi}{\lambda} (z_k - z_j) \quad (1)$$

을 만족시킨다.

여기서 길이, 시간 및 속도를 각각  $\lambda$ ,  $2\lambda^2/NK$  및  $NK/2\lambda$ 를 사용하여 무차원화하고 시계방향으로 회전하는 와류를 (+)로 잡으면, 식(1)은

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = \frac{i}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \cot \pi (z_k - z_j) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

와 같이 간략화된다.

식(2)는 1계 연립상미분방정식으로 4계 Runge-Kutta 방법 등 여러 가지 방법을 사용하여 수치해석할 수 있으나 한 단계 전진하는데  $N^2$ 에 비례하는 계산량이 요구되므로 와류의 수를 늘려서 계산하는 데는 한계가 있다.

식(2)와 같이 Lagrange 기술방법을 사용하지 않고 Euler 기술방법으로 운동방정식을 만들고 cloud-in-cell<sup>(17,18)</sup> 방법 등을 사용하여 수치계산하면 한 단계 전진하는데  $N \log_2 N$ 에 비례하는 계산량이 소요되므로 계산시간이 짧아지게 된다. 그러나 이 경우에는 점와류가 아니고 격자의 크기만한 넓이를 가진 와류들의 운동을 계산하는 것과 같은 효과를 얻게 되며 두 와류사이의 상호작용은 이방성을 가지게 되

어 두 와류사이의 거리뿐만 아니라 방향의 영향도 받게 된다.

이와 같이 와관(vortex sheet)을 와열(vortex street)로 근사시키는 것은 Rosenhead<sup>(19)</sup>로부터 시작되었다. 그는 한 파장 내에 등간격으로 4개, 8개, 및 12개의 와류들이 정현파의 곡선을 따라 놓이도록 한 후, 이 와류들의 운동을 비교적 시간간격을 크게 하여 수치적분 하였다. 그 결과 와류들은 부드럽게 감겨서 큰 소용돌이를 이루는 것으로 나타났다. 그후 Kelvin-Helmholtz 안정성<sup>(20)</sup>이나 후류(wake)<sup>(21)(22)</sup>의 계산 등과 관련하여 많은 사람들에 의해 보다 많은 와류들을 사용한 비슷한 계산이 행하여졌으며, 와류의 수를 증가시킬 경우 와류들이 매우

표 1 계산에 사용된 변수들의 값과 혼합경계층의 평균두께

(a) 점점에 대해 점대칭이 되도록 계산한 경우

계산번호	점와류수 $N$	적분간격 $\Delta t$	초기교란 진폭 $A$	초기교란의 형태	혼합경계층의 평균두께			비 고
					평균구간	표준편차 $\sigma$	최 대 $y$ -좌표	
1	64	$2^{-8}$	0.1	정 현 파	$1 < t < 4$	0.1045	0.2463	
2	64	$2^{-8}$	0.05	정 현 파	$1 < t < 4$	0.0963	0.1776	
3	64	$2^{-7}$	0.05	정 현 파	$1 < t < 4$	0.0897	0.1904	
4	64	$2^{-6}$	0.05	정 현 파	$1 < t < 4$	0.0879	0.1804	
5	32	$2^{-8}$	0.05	정 현 파	$1 < t < 4$	0.0904	0.1828	
6	64	$2^{-8}$	0.025	정 현 파	$1 < t < 4$	0.0867	0.1662	
7	64	$2^{-8}$	0.01	정 현 파	$1 < t < 4$	0.0833	0.1673	
8	64	$2^{-8}$	0.01	합성정현파 ( $\sin 2\pi x + \sin 4\pi x$ )	$1 < t < 4$	0.0984	0.2440	
9	64	$2^{-8}$	0.01	합성정현파 ( $\sin 2\pi x - \sin 4\pi x$ )	$1 < t < 4$	0.103*	0.2121*	
10	64	$2^{-8}$	0.01	불 규 칩 파	$1 < t < 4$	0.1172*	0.2138*	

(b) 점대칭을 요구하지 않은 경우

계산번호	점와류수 $N$	적분간격 $\Delta t$	초기교란 진폭 $A$	초기교란의 형태	혼합경계층의 평균두께			비 고
					평균구간	표준편차 $\sigma$	최 대 $y$ -좌표	
11	64	$2^{-8}$	0.01	합성정현파 ( $\sin 2\pi x + \sin 4\pi x$ )	$1 < t < 4$	0.1076	0.2414	
12	64	$2^{-8}$	0.01	합성정현파 ( $\sin 2\pi x - \sin 4\pi x$ )	$2 < t < 4$	0.1066	0.2358	
13	64	$2^{-8}$	0.01	불 규 칩 파	$1 < t < 3$ $4 < t < 6$	0.1060* 0.1062	0.2561* 0.2493	초기조건은 10번 계산 파 동일
14	64	$2^{-8}$	0.01	불 규 칩 파	$2 < t < 4$	0.1110	0.2664	초기조건은 10번 계산 에서의 초기조건과 $x$ - 축에 대칭임
평균						0.1075	0.2498	

\*  $0 < x < 1$  사이에 2개의 소용돌이가 있으므로 다른 값들과 동등한 조건에서 비교하기 위하여, 구한 평균치의 2배를 기록하였다.

무질서하게 운동하면서 소용돌이를 이룬다는 것이 밝혀졌다. 이는 계산상의 오차보다는 오히려 점와류의 특이성에 기인하는 것처럼 보이며 점와류 대신 Rankine의 원형와류 등을 사용하거나 다른 적당한 방법으로 와류들이 부드럽게 감기도록 할 수가 있다<sup>(15,23)</sup>. 그러나 본 연구에서는 와류들의 미시적인 불규칙운동이 소용돌이의 거시적구조에는 큰 영향을 미치지 않는다고 생각하여<sup>(24)</sup> 이러한 방법을 사용하지 않았다.

### III. 계산결과 및 고찰

울산공과대학에 있는 PRIME 750 전자계산기를 이용하여 4제 Runge-Kutta법으로 계산하였다. 대부분의 계산에서 와류의 수는 64개로 하고 시간간격  $\Delta t$ 는  $2^{-8}=0.00390625$ 로 하여  $t=4.0$ 까지 계산하였고 계산의 정확성을 조사하기 위하여 몇가지 경우에 대해서는 와류의 수를 감소하거나, 시간 간격을 늘려서 계산하였다. 와류들의 초기위치는 정현파, 두 정현파의 중첩 또는 불규칙하게 주었으며 진폭을 여러가지로 변화시켰다. 와류들의 초기위치가 정현파이면 식(2)의 해는 항상 절점(nodal point)에 대하여 점대칭을 이루게 된다. 처음에는 이 성질을 이용하여 전체 와류의 반에 대해서만 위치를 계산함으로써 계산시간을 줄일 수 있도록 프로그램을 작성하였다. 계산결과에는 이러한 대칭 조건이 와류들의 거시적 운동에 어떤 제약을 가하고 있음을 보여주었다. 따라서 그 후 프로그램을 수정하여 와류들의 위치를 전부 계산하도록 하였다. 표1에 계산에 사용된 매개변수의 값들이 주어져 있다.

그림1은 진폭이 0.1인 정현파의 형태로 배치되어 있던 와류들의 위치가 시간에 따라 변화하는 것을 보여주고 있다. 점와류들은 처음에는 선형안정성이론<sup>(16)</sup>에서 예측한대로  $x$ 축에서 멀어지는 방향으로, 그리고 동시에 중심( $x=0.5$ )을 향하여 운동한다.  $t=0.15$ 정도가 되면 이들은 조금씩 감겨서 중심의 양측에 두개의 소용돌이가 만들어지기 시작하고, 이 두개의 소용돌이는 주위의 점와류를 흡수하여 점점 커지면서 상호작용에 의해 중심점의 주위를 선회한다. 이 결과는 와류들이 중심점(0.5, 0)의 주위로 부드럽게 감겨서 한개의 소용돌이만이 만들어진 Rosenhead<sup>(18)</sup>나 Acton<sup>(15)</sup>의 계산결과와는 차이가

나는데 이는 본 계산에서 보다 많은 점와류들을 사용한 때문이며, 40개의 점와류를 사용한 Chow<sup>(25)</sup>의 계산결과와는 비교적 잘 일치하고 있다.  $t=0.75$ 정도가 되면 중심점 주위를 선회하던 두 소용돌이는 합쳐져서 타원형의 한개의 큰 와류를 이루고 이 소용돌이는 중심점 주위를 서서히 회전한다. 한편 중앙의 소용돌이에 흡수되지 않은 점와류들은 무질서하게 흩어지면서  $x$ -축을 따라 흘러간다.

그림 2는 초기교란의 진폭을 0.01로 줄였을 때 점와류들의 운동을 보여주고 있다. 초기교란이 어느 정도 커지고나서 점와류들이 중심으로 비교적 부드럽게 감기었던 앞의 경우와는 달리 짧은 파장의 Kelvin-Helmholtz 불안정성이 상당히 일찍부터 발달하여 점와류들은 여러 개의 작은 와류송이들로 뭉쳐지고 있음을 알 수 있다.

시간이 지나면 이들 와류송이들도 중심으로 감겨들어서 결국에는 큰 소용돌이를 이루게 되고 앞의 경우와 비슷한 와류분포를 이루게 된다.

그림3은 두 정현파의 중첩 즉,

$$y=0.01(\sin 2\pi x + \sin 4\pi x)$$

의 형태로 초기차란을 주었을 때 와류들의 운동을 보여주고 있다. 제2조화파(second harmonic)에 의한 교란은 제1조화파에 의한 교란보다 훨씬 빨리 발달하여 와류들은 먼저 두개의 소용돌이로 모였다가 다시 한 개의 소용돌이로 합쳐지는 것을 알 수 있다. 이러한 와류결합(vortex pairing)운동은 Winant와 Browand<sup>(2)</sup>의 관찰결과와 잘 일치하고 있다.

한편  $y=0.01(\sin 2\pi x - \sin 4\pi x)$ 의 형태로 초기교란을 주게 되면 제2조화파의 발달로 만들어진 두개의 소용돌이는 각각 중심점(0,0) 및 (0.5,0)의 주위를 선회하며 전혀 합쳐지지 않았다. 이는 제2조화파에 의해 만들어진 두 개의 소용돌이의 중심이 정확히 (0,0) 및 (0.5,0)에 위치하도록 초기교란이 주어졌고 프로그램도 작성되었던 때문이라고 생각된다.

그러나 (10)번 계산의 경우 초기차란을 불규칙적으로 주었는데도 앞서와 같이 중심점 (0,0) 및 (0.5,0)의 주위를 선회하는 두개의 소용돌이가 형성되고 이 두개의 소용돌이는 결코 합쳐지지 않았다. 물론 초기 와류들의 위치가 중심점(0.5,0)에 대해 점대칭이 되도록 주어졌다고는 하지만 이 결과는 매우 의외였으며, 중심점 (0,0) 및 (0.5,0)에 위치한 와류들을 움직이지 못하게 하고 또 와류들의 위치

가 이들 중심점에 대해 점대칭이 되도록 하는 것은 와류의 운동에 인위적으로 어떤 안정성을 부과하는 것이 아닌가 하는 의구심을 갖게 하였다. 따라서 이제까지의 프로그램을 수정하여 절점에 대한 대칭 조건을 제거하고 모든 와류들에 대하여 위치를 계산하도록 하였다. 그림4는 새로운 프로그램을 사용하여 초기 교란을 (9)번 계산에서와 같이

$$y=0.01 (\sin 2\pi x - \sin 4\pi x)$$

의 형태로 주었을 때 점와류들의 운동을 계산한 결과이다. (9)번 계산에서와 같이 와류들은 중심점 (0,0) 및 (0.5,0)의 주위를 선회하는 두 개의 소용돌이로 합쳐진다. 이 두 소용돌이는 상당히 안정된 것 같이 보이며 오랫동안 그 구조를 유지하다가  $t=1.6$  부근에서 갑자기 합쳐지기 시작하여  $t=2.0$  부근에서 한 개의 소용돌이로 될을 알 수 있다. 와류결합이 갑자기 이루어진다는 것은 그림5에서도 알 수 있다. 그림5는 (10)번 계산에서와 같은 초기조건을 주고 계산한 결과이다. 초기위치가 불규칙적으로 주어진 와류들은 몇 개씩 뭉쳐서 여러 개의 와류송이들을 이루고 이들 와류송이들은  $t=0.75$  부근에서 두 개의 소용돌이로 합쳐진다. 이 두 개의 소용돌이는 매우 안정되어 그 구조를 상당히 오랫동안 유지한다. 그러나 (10)번 계산의 경우와는 달리  $t=3.0$  부근에서 이 두 개의 소용돌이는 갑자기 결합하기 시작하여 한 개의 큰 소용돌이로 된다.

일정한 주파수를 가진 잘 제어된 진동을 가함으로써 난류의 발달을 억압할 수 있다는 사실은 여러 사람들의 실험에 의하여 확인되었다<sup>(26)</sup>. 이러한 제어된 여진(excitation)에 의한 난류억압 현상은 소용돌이외 열이 매우 높은 안정성을 가지고 있다는 사실과 밀접한 관련을 가지고 있는 것 같다. 와열 또는 와관에 일정한 주파수의 진동을 주면 다른 주파수의 교란을 억압하면서 여진에 상응하는 주파수의 교란만이 급격히 증가하고, 와류나 와관은 가해진 진동의 파장과 같은 간격을 갖는 소용돌이의 열로 감기게 된다. 이 소용돌이의 열은 매우 안정되어 있으므로 와류결합이 억제되고 따라서 난류발달도 상당히 억압당하게 된다.

(13)번 계산의 결과, 즉 점와류들이 두 개의 안정된 소용돌이로 감긴 것은 와류들의 초기위치를 중심점 (0.5,0)에 대해 대칭이 되도록 준 결과라기보다는 우연히 제2조화파의 영향이 강하게 작용하도록 만들어진 결과라고 생각된다. 그림6은 와류들

의 초기위치가 (13)번 계산에서의 초기위치와  $x$ -축에 대해 대칭이 되도록 하여 계산한 결과이다. 와류들은 앞의 여러 예에서와 마찬가지로 처음에는 몇 개의 와류송이들로 뭉쳐지나, 이들 와류송이들은 전체적으로 매우 이완된 타원형의 와류구조를 이루면서 중심점(0.5,0)을 중심으로 일정한 각속도로 회전한다. 그러나 이와 같이 길게 이완된 와류구조는 Moore와 Saffman<sup>(13)</sup>의 계산결과와 같이 매우 불안정하여 그 상태를 오래 유지하지 못하고 분리되어  $t=1.25$ 부근에서는 보다 이심률이 작은 세개의 소용돌이로 변함을 그림에서 알 수 있다. 이들 세개의 소용돌이는 시간이 경과함에 따라 두 번의 와류결합을 거쳐 한 개의 큰 소용돌이로 합쳐져서  $t=3.0$  이후에서는 앞의 여러 예에서와 비슷한 와류구조가 된다.

전단경계층의 두께의 변화를 알아보기 위하여 점와류들의  $y$ -좌표의 표준편차  $\sigma$ 와 최대값  $y_{max}$ 을 구하였다. 최대값  $y_{max}$ 는 가시적방법을 사용하여 측정된 혼합경계층의 두께라고 간주할 수 있으며 표준편차  $\sigma$ 는 혼합경계층에서의 와도두께 (vorticity thickness)  $\delta_w$  등 여러가지 경계층두께와 밀접한 관련을 가지고 있다.

그림7은 초기교란을 진폭이 0.05인 정현파의 형태로 주었을 때 점와류들의  $y$ -좌표의 표준편차  $\sigma$ 와 최대값  $y_{max}$ 의 시간에 따른 변화를 보여주고 있다.

64개의 점와류들을 평균했던 관계로 높은 진동수의 변동(fluctuation)이 억제되어 표준편차  $\sigma$ 가 최대값  $y_{max}$ 에 비해 훨씬 부드럽게 변하고 있다는 점을 제외하면 두 값이 매우 비슷한 경향의 변화를 보여주고 있다. 이들은 선형안정성이론에서 예측할 수 있는 것과 같이 처음에는 지수함수적으로 증가한다.  $t=0.15$  부근에서 비선형 천이단계<sup>(27)</sup>에 이르고 이후에는 표준편차  $\sigma$ 와 최대값  $y_{max}$ 은 모두 직선적으로 증가한다.  $t=0.3$  이후에는 이들은 더 이상 증가하지 않고 정상불규칙운동(stationary random motion)을 하는 것처럼 보인다.

본 수치해석의 정확성을 조사하기 위하여 초기교란을 진폭이 0.05인 정현파의 형태로 한 경우에 대하여 적분시간간격  $\Delta t$ 와 점와류수  $N$ 을 변화시키면서 계산하였으며 그 결과가 그림7에 나타나 있다. 그림7에서 점와류의  $y$ -좌표의 최대값  $y_{max}$ 의 경우에는 선형천이 구간 즉  $t=0.15$ 까지, 표준편차  $\sigma$ 의 경우에는 비선형 천이구간 즉  $t=0.3$ 까지

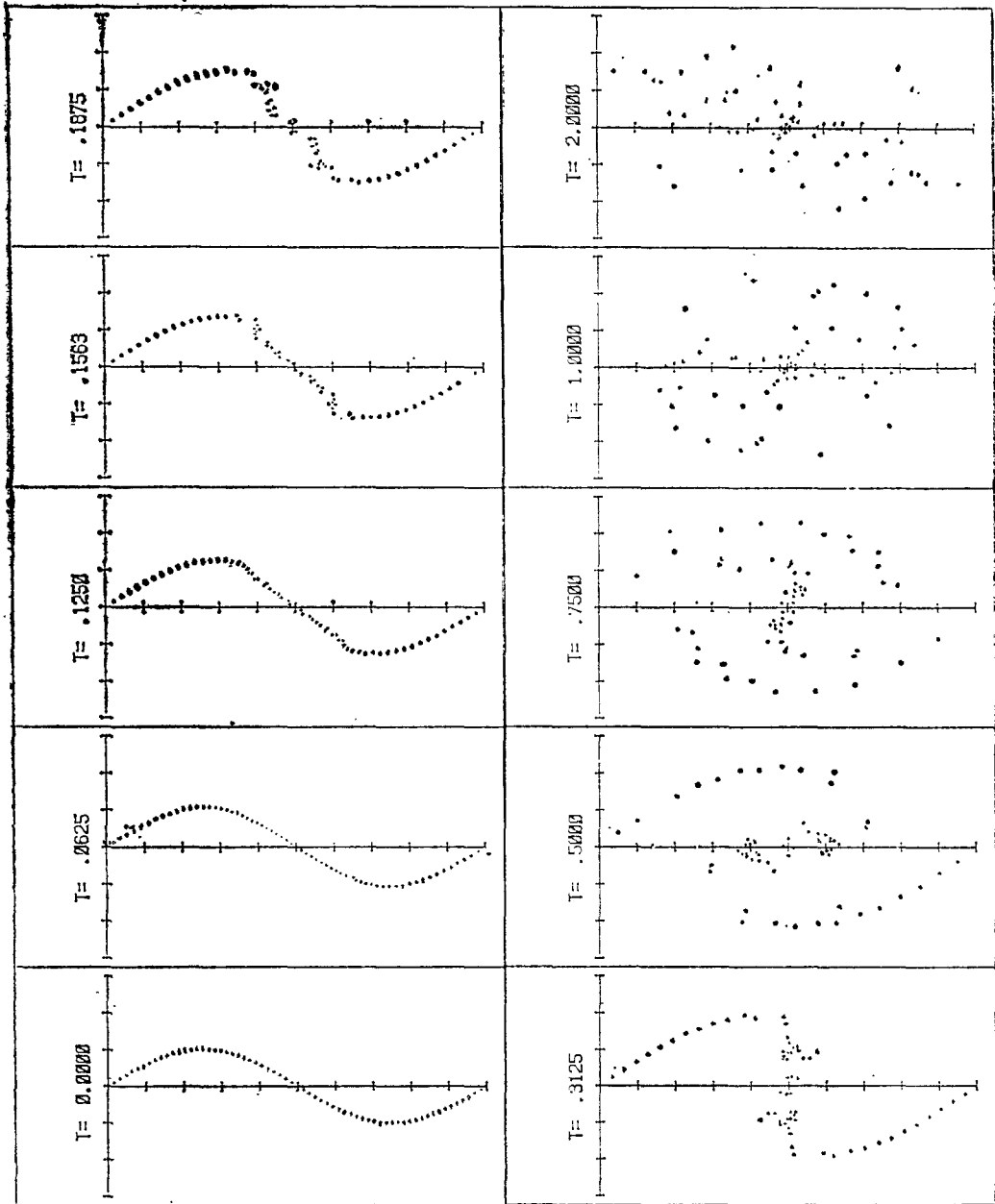


그림 1. 점와류들의 순서, 1번 계산

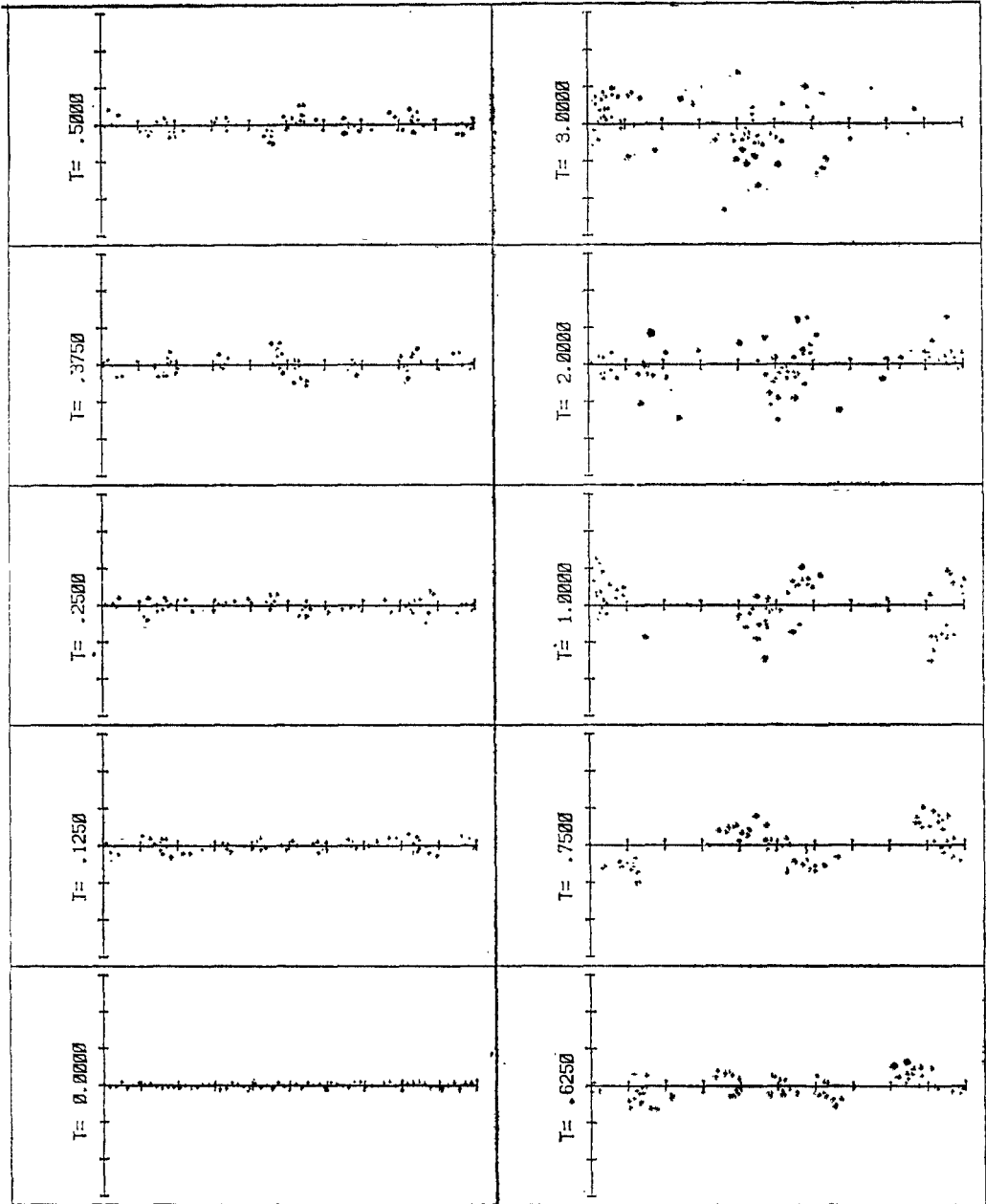


그림 2. 점와류들의 대해, 7번계산

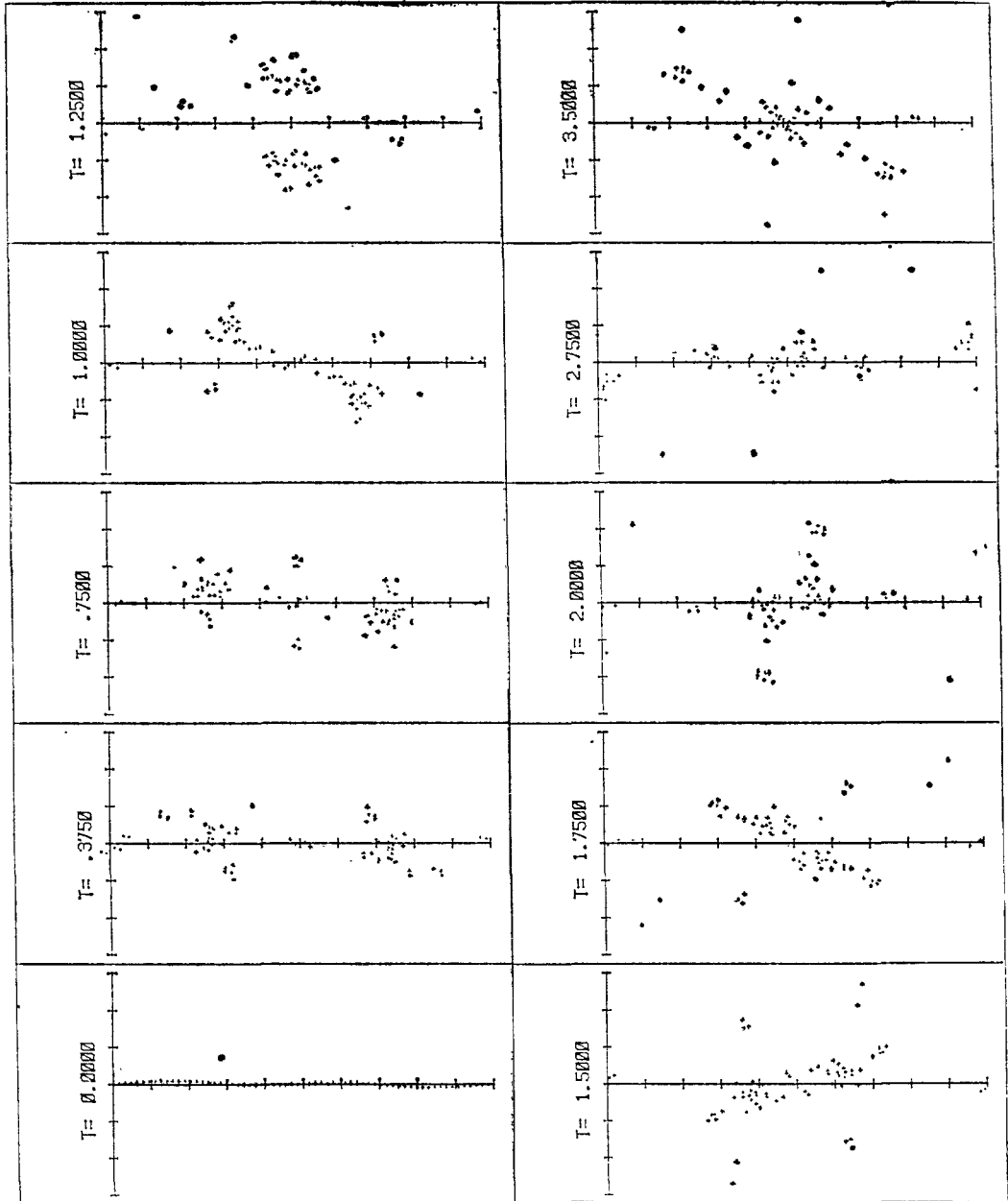


그림 3. 점와류들의 운 위, 8번계산



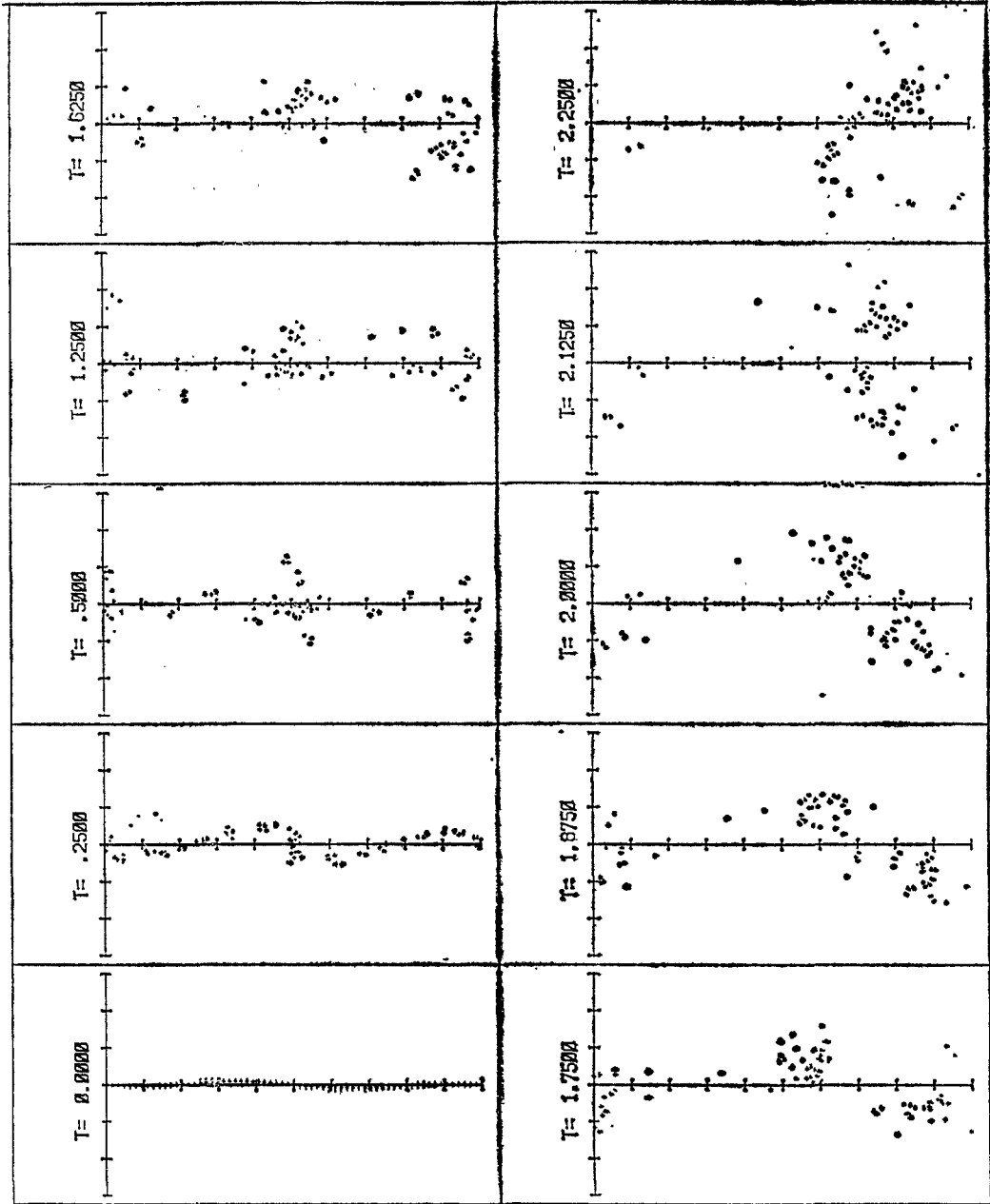


그림 4. 점외류들의 유동, 12번 계산

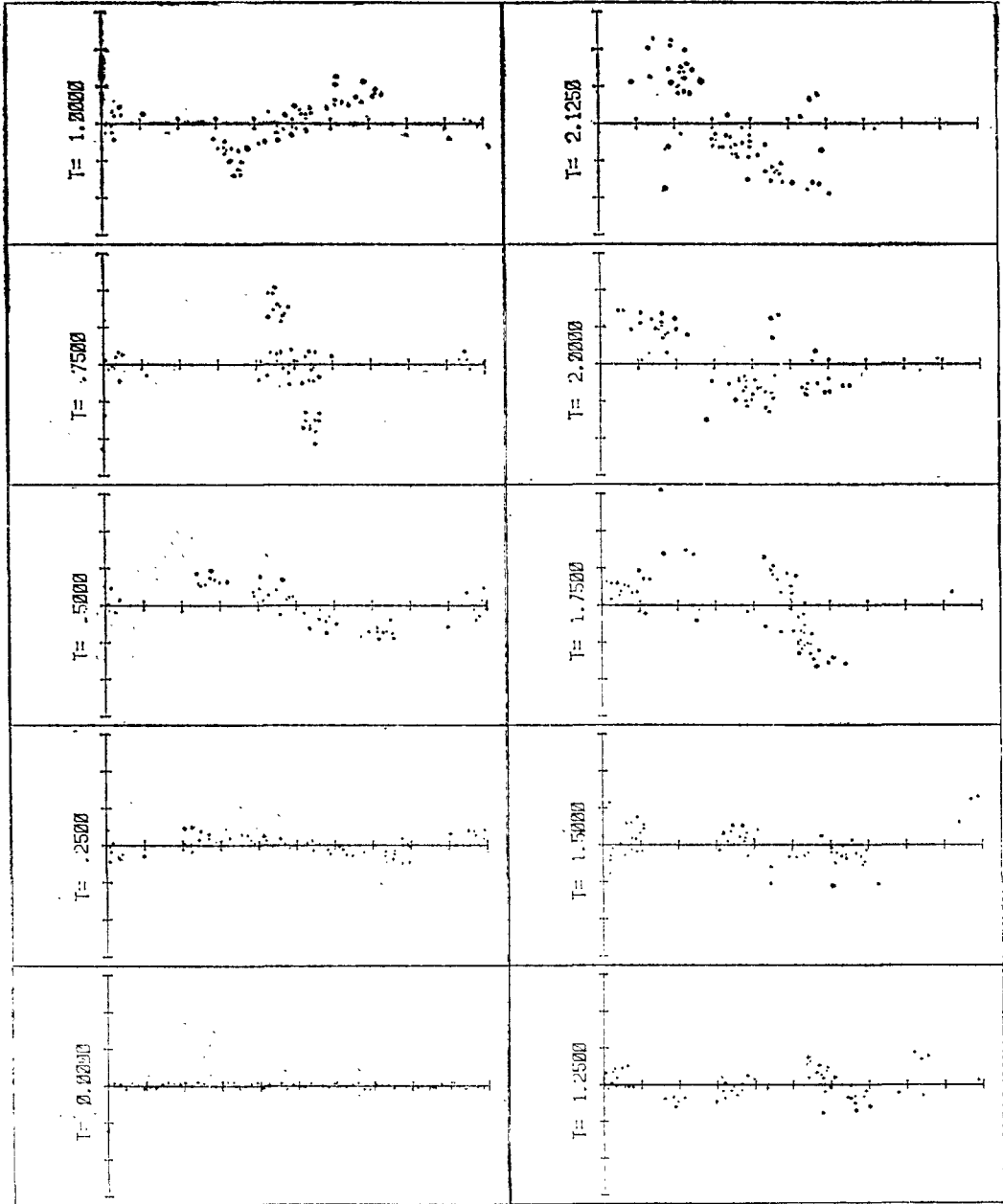


그림 5-1. 전와류들의 수에, 13번 계산

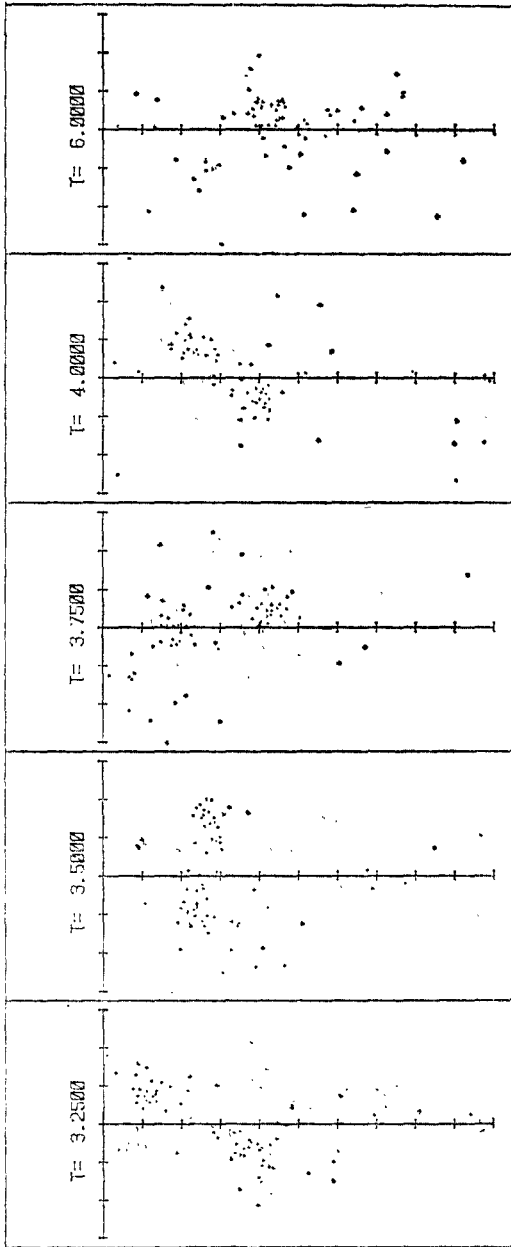


그림 5-2. 점와류들의 운동, 13번 계산

정확함을 보여주고 있다. 그 이후에도 비록 자 순간에서의 값에는 큰 차이가 나타나나 정상불규칙운동의 관점에서 볼 때에는 거의 일치하고 있다.

그림8은 전단경계층의 두께에 대한 초기교란진폭의 영향을 보여주고 있다. 진폭이 감소함에 따라 폭선이 조금씩 우측으로 이동하고, 높은 주파수의 불안정성이 상대적으로 강하여져서 폭선에 나타나는 작은 파동이 심하여 짐을 알 수 있다. 그림 9는 초기교란을 두 정현파의 중첩 형태로 하였을 경우 전단경계층의 변화를 보여준다. 초기 교란이  $y=0.01(\sin 2\pi x + \sin 4\pi x)$ 와 같이 주어졌 경우에는 앞에서 설명한 바와 같이(그림 3) 두 개의 소용돌이들이 이루어졌다가 바로 와류결합이 이루어져서 한 개의 큰 소용돌이로 합쳐지는 것을 이 그림에서도 알 수 있다. 이 경우에는 절점에 대하여 대칭이 되도록 계산을 하거나 대칭성을 요구하지 않고 계산을 하거나 그 결과에 있어서 큰 차이가 없다. 그러나 초기교란을  $y=0.01(\sin 2\pi x - \sin 4\pi x)$ 로 하던 처음에 생성된 두 개의 소용돌이들이 절점에 대하여 대칭이 되도록 계산한 경우에는 결합이 안 이루어졌으나 (12)번 계산의 경우에는  $t=1.5$ 부근에서 와류결합이 이루어지기 시작하고 경계층의 두께가 갑자기 증가할 수 있다. 점와류들이 일단 소용돌이로 감겨지면 안정된 상태가 된다는 것은 그림10에서도 알 수 있다. (13)번 계산의 경우 경계층의 두께는 처음에는 증가하나  $t=1.0$ 에서  $t=3.0$  사이에서는 일단 생성된 두 개의 소용돌이구조가 유지되므로 거의 변하지 않는다. 그러나  $t=3.0$ 부근에서 와류결합이 이루어지던지 보다 큰 규모의 새로운 소용돌이들이 생성되고 경계층의 두께는 급격히 증가한다. 와류에 가해진 교란이 불규칙적이면 경계층의 발달양상이 정현파나 이들의 합성파의 형태로 교란을 가했을 경우와 많이 달라진다는 것은 그림 10과 그림 7,8,9를 비교해 보아도 알 수 있다. 그림 7,8,9에서와 같이 일정한 주파수의 정현파 또는 정현파의 합성 형태로 와류에 교란을 가하면 와류는 선형적인 단계와 비선형적인 단계를 거쳐 가해진 교란의 파장과 같은 간격을 갖는 소용돌이로 비교적 부드럽게 감기나 교란이 불규칙적이면 경계층의 두께는 처음부터 거의 직선적으로 증가할 뿐만 아니라, 직선적으로 증가하는 동안에도 높은 주파수의 변동이 심하게 일어나고 있음을 그림10이 보여주고 있다. 점와류들이 감기어서 이루어진 소용돌이구조는 정

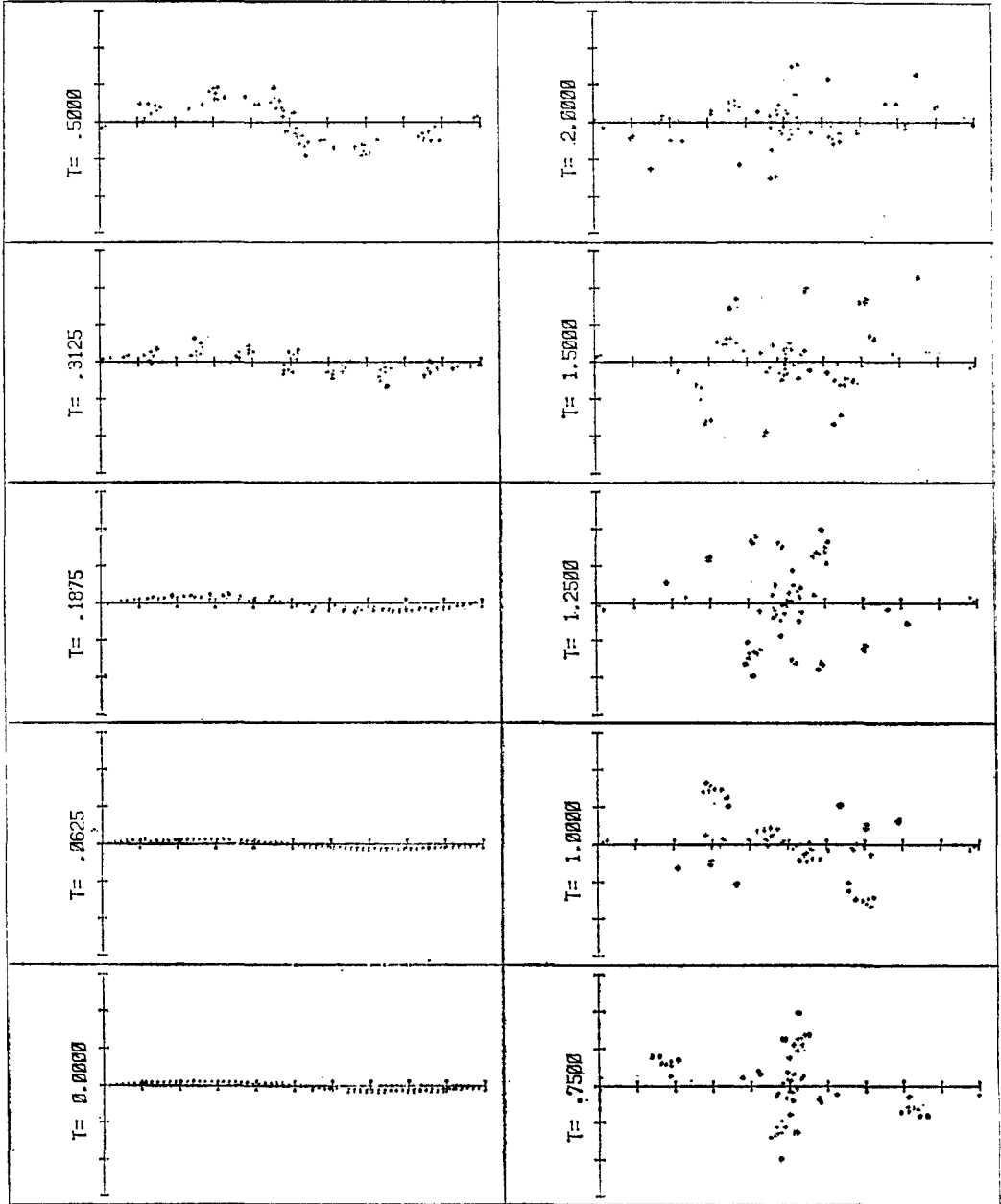


그림 6-1. 점와류들의 유예, 14번 계산

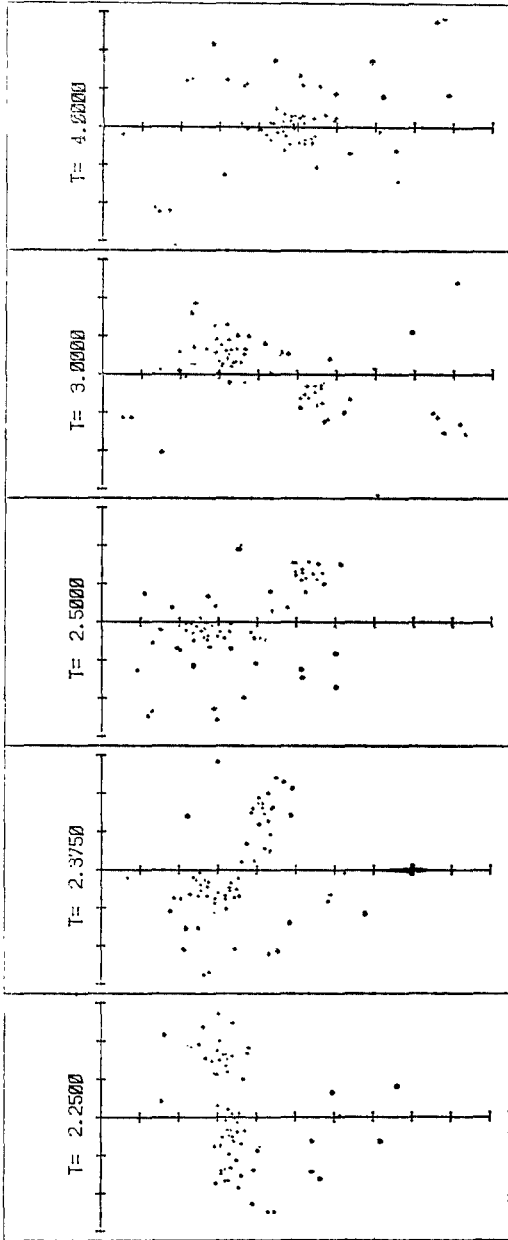


그림 6-2. 점와류들의 운동, 14번 계산

상불규칙운동을 하고는 있으나 초기교란상태에 무관할 뿐만 아니라 매우 안정되어 있다는 점에서 어떤 평형상태로 간주할 수 있을 것이다. Moore와 Saffman<sup>(13)</sup>이 생각한 유한단면을 가진 와류들의 열의 정상운동은 운동방정식의 비선형성에 비추어 볼 때 실린성이 퇴박하다. 표1과 그림11에는 이러한 평형상태 또는 준정상상태에서의 점와류분포에 관한 평균값들이 주어져 있다. 평균을 취한 시간구간은 그림 7,8,9,10으로부터 판단하였으며 표 1에 기록 하였다. 그림11의 와도분포는  $y$ 방향으로 구간을  $\Delta y=0.005$ 로 분할하고 각구간 내에 존재하는 점와류들의 수를 평균을 취한 전 시간구간에 대해 합산하여 계산하였다. 특히 (13)번 계산의 경우에는 와류 결합의 전후를 구분하여 평균을 구하였으며, (9)번과 (10)번 계산 및 (13)번 계산중 와류결합이 이루어지기 전 즉 구간  $1 < t < 3$ 에서의 평균값들은  $0 < x < 1$  사이에 두 개의 소용돌이가 만들어져 있음을 고려하여 그 값을 수정하였다. 그림 11을 검토하여 보면 와도가 정규분포곡선

$$w(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x^2/2\sigma^2) \quad (3)$$

보다는 평균속도분포가 쌍곡선탄젠트 함수로 나타난다고 가정했을 때 얻어지는 와도분포곡선

$$w(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\sigma} \operatorname{sech}^2 \frac{\pi y}{2\sqrt{3}\sigma} \quad (4)$$

와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 여기서  $\sigma$ 는 수치계산에서 얻어진 점와류들의  $y$ -좌표의 표준편차의 평균 즉 0.1075로 하였다.

와도가 식 (4)와 같이 분포되어 있다고 가정하면 와도두께  $\delta_w$ 와 운동량두께  $\theta$ 는 각각

$$\delta_w = \frac{\Delta U}{w_{\max}} = 0.24 \quad (5)$$

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{u}{\Delta U} \right)^2 \right] dy = 0.059 \quad (6)$$

가 된다. 한편  $2y_{\max}$ 을 전단경계층의 가시두께 (visual thickness)라고 생각하면 가시두께  $\delta_{vis}$ 은

$$\delta_{vis} = 0.50 \quad (7)$$

이 된다. 식 (5)로 주어진  $\delta_w$ 의 값은 Moore와 Saffman<sup>(13)</sup>이 계산한 0.29보다 20% 정도 작다. 그러나 Moore와 Saffman은 와도가 균일한 유한단면의 와류의 열로서 계산한 것이므로 본 결과와 비교하기는 어렵다.

그림 7,8,9,10을 보면 와류결합이 이루어지는 동안에는 와류들의  $y$ -좌표의 표준편차  $\sigma$ 는 일정한 속

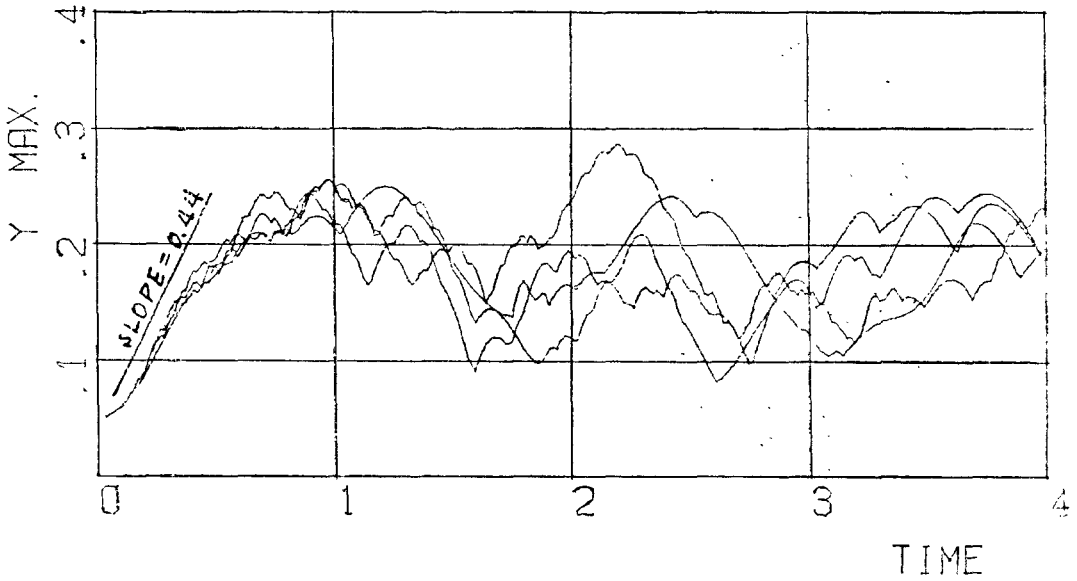
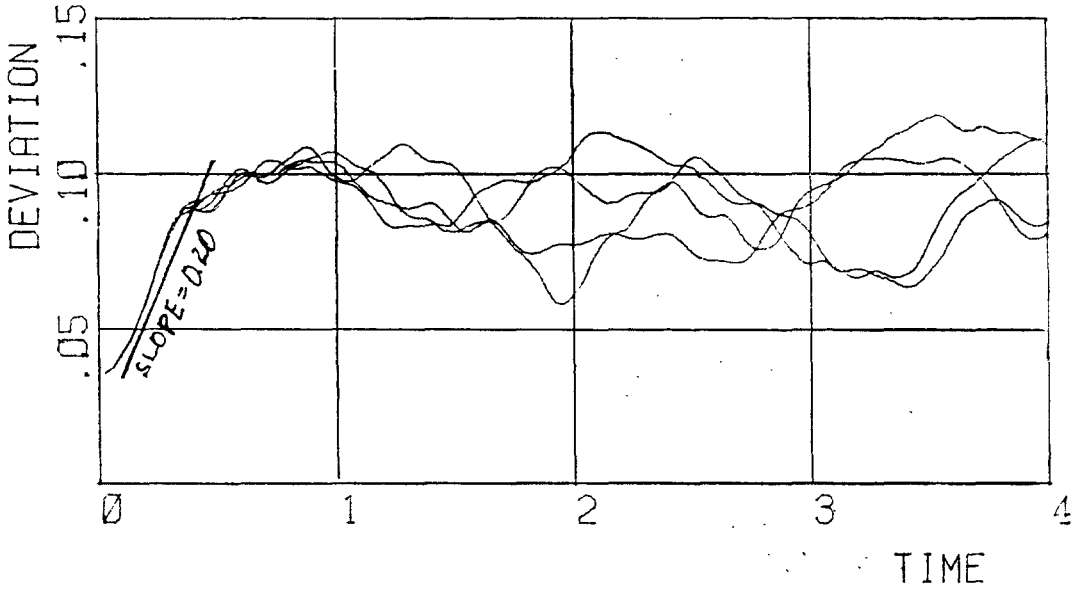


그림 7. 전단경계층의 두께의 변화, 초기교란을 진폭이 0.05인 정현파로 주었을 경우. 2, 3, 4, 5번 계산 결과가 함께 그려져 있음.

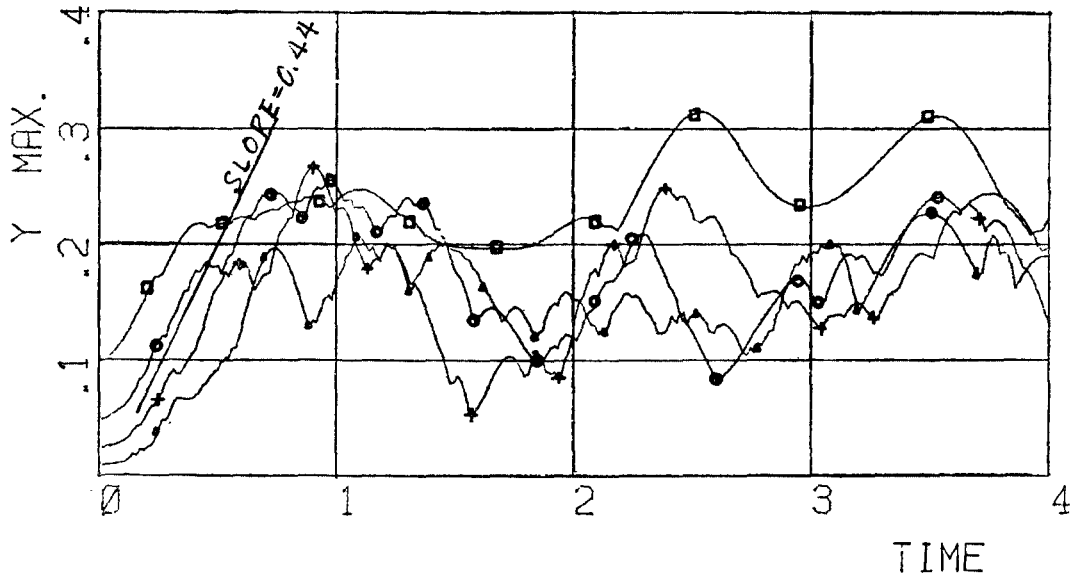
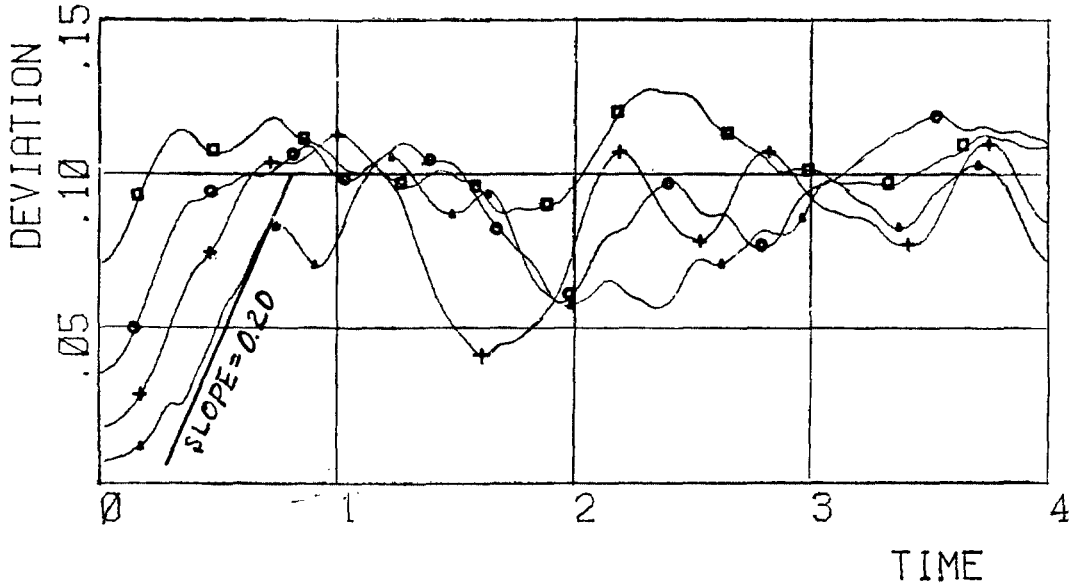


그림 8. 초기교란 진폭의 전단 경계층 두께에 대한 영향, 초기교란을 정현파의 형태로 주었을 경우. 1번계산,  $\square$ ; 2번계산,  $\circ$ ; 6번계산,  $+$ ; 7번계산,  $\blacktriangle$

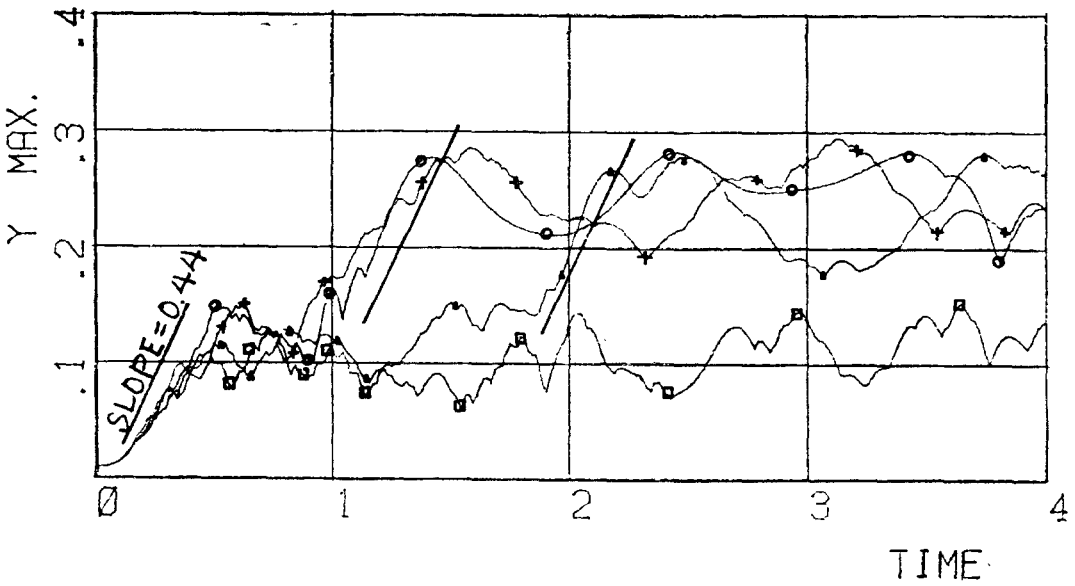
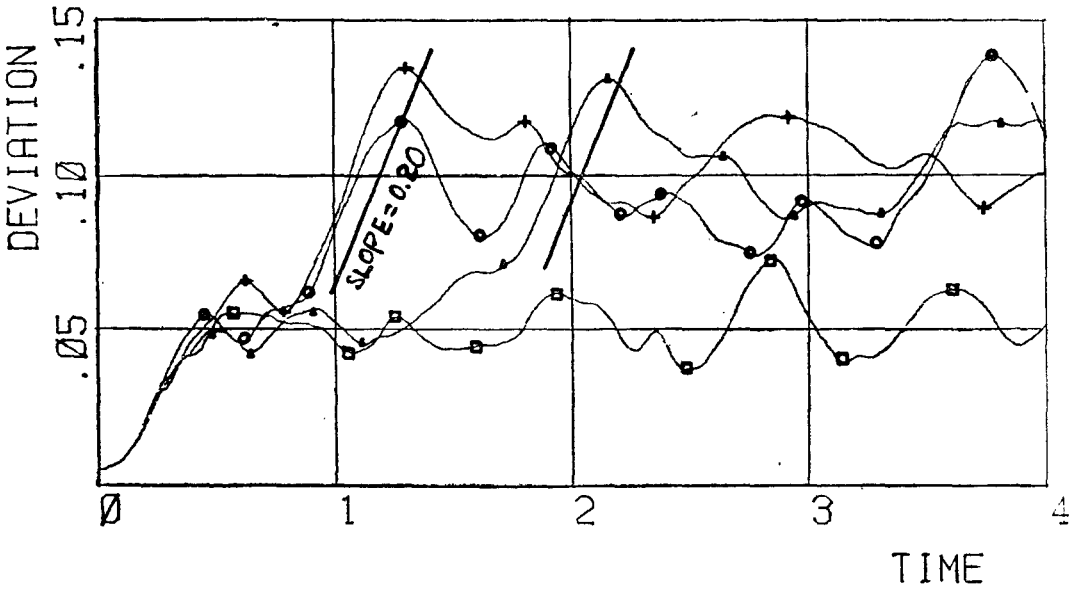


그림 9. 전단 경계층 두께의 변화, 초기교란을 합성정현파의 형태로 주었을 경우. 8번계산; —○—  
 : 9번계산, —□—: 11번계산, —+—: 12번 계산—▲—



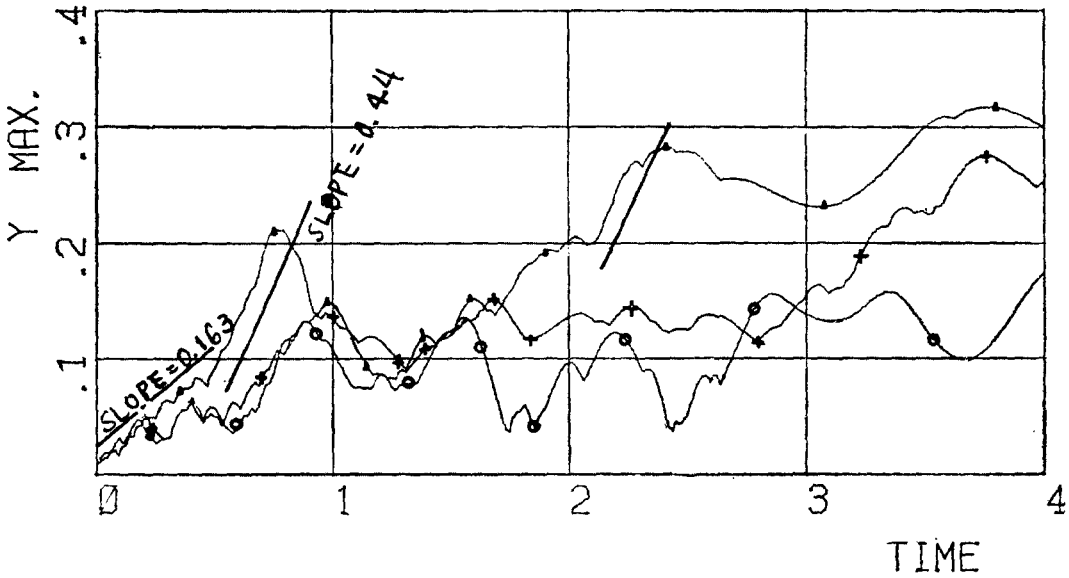
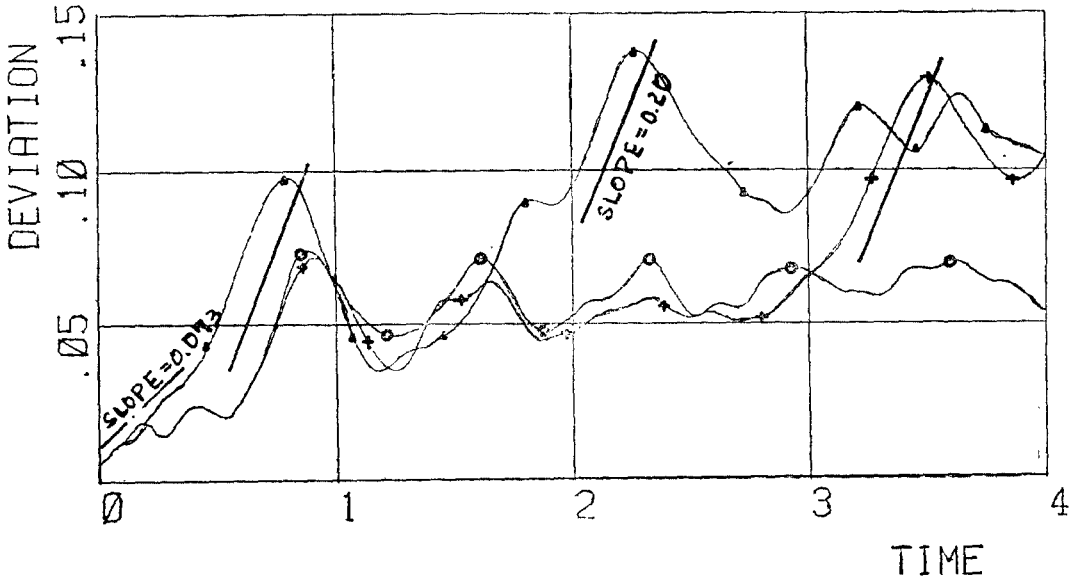
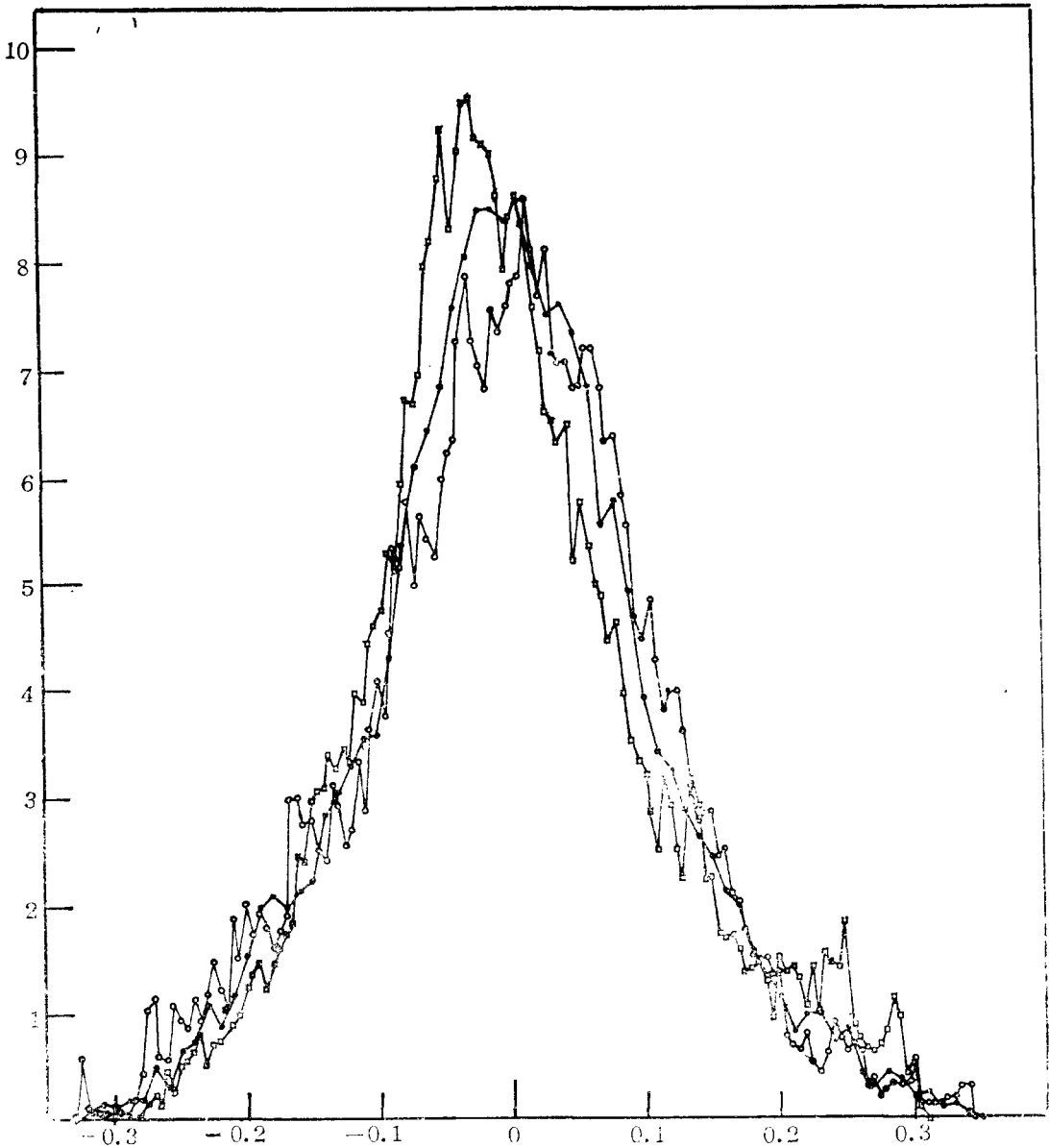


그림 10. 전단 경계층 두께의 변화, 초기조건을 불규칙하게 주었을 경우. 10번계산, —○—; 13번계산, —+—; 14번계산, —▲—



7

그림 11. 와도분포, 13번계산( $1 < t < 3$ ), —●— : 13번계산, ( $4 < t < 6$ )—○— : 14번계산, —□—

도

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0.20 \quad (8)$$

로 증가하고 있음을 알 수 있다.  $y$ 좌표의 최대값  $y_{max}$ 도 역시 거의 일정한 속도

$$\frac{dy_{max}}{dt} = 0.44 \quad (9)$$

로 증가한다. 이러한 증가속도는 매우 큰 것으로 전단경계층 내에서 와류결합이 계속하여 발생하고 있지는 않다는 것을 말해준다. 즉 와류결합에 의해 생성된 소용돌이는 어느 기간동안 그 구조를 유지할 수 있으며, 시간이 경과한 후 인접한 와류와 갑자기 결합하여 보다 큰 소용돌이로 만들어진다. 경계층의 두께는 이와같은 와류결합→평형상태→와류결합→평형상태→……의 반복과정을 통하여 두꺼워진다. 실제로 초기교란을 불규칙적으로 한 그림 10을 보면 전단경계층의 두께가 처음에는 식(8), (9)로 주어진 값보다 훨씬 낮은 속도

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0.073 \quad (10)$$

및

$$\frac{dy_{max}}{dt} = 0.163 \quad (11)$$

로 증가하고 있음을 알 수 있다.

식(10), (11)로 주어진 증가율은 식(8), (9)의 결과의 1/3 정도이며, 와류결합에 의해 만들어진 새로운 소용돌이가 다시 결합하기 전에 상당히 오랫동안 평형상태를 유지할 수 있음을 의미한다. 따라서 평형상태에서 얻어진 전단경계층의 여러가지 두께에 관한 식(5), (6), (7)의 관계가 적용될 수 있고 식(10)과  $\sigma = 0.1075$ 로 부터 경계층두께의 증가율에 관한 식

$$\frac{d\delta_w}{dt} = 0.163 \quad (12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.040 \quad (13)$$

$$\frac{d\delta_{vis}}{dt} = 0.340 \quad (14)$$

들이 얻어진다. 식(13)의 값은 Aref와 Siggia<sup>(17)</sup>가 얻은 값과 일치하고 있다.

비경상 전단경계층과 혼합경계층은 엄밀한 의미에서는 동등하지 않으나 혼합경계층의 퍼짐각(spreading angle)이 작으므로 이 두 경계층은 비슷하다고 볼 수 있다. 혼합경계층 양측의 주류속도를  $U_1, U_2$ , 분리판(splitter plate)으로부터의 거리를  $x$ , 혼합경계층의 가상원점(virtual origin)의 좌표

를  $x_0$ 라 하고, 와류들이 평균속도  $U = \frac{U_1 + U_2}{2}$  로 흘러간다고 가정하면, 식(12), (13), (14)는 각각

$$\frac{d\delta_w}{dx} = \frac{\delta_w}{x - x_0} = 0.163A \quad (15)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta}{x - x_0} = 0.040A \quad (16)$$

$$\frac{d\delta_{vis}}{dx} = \frac{\delta_{vis}}{x - x_0} = 0.340A \quad (17)$$

로 된다. 여기서

$$A = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} = \frac{\Delta U}{2U}$$

이다. 식(13), (14), (15)의 퍼짐율(spreading rate)은 여러사람들의 실험결과<sup>(1), (28)</sup>와 잘 일치한다.

## Ⅶ. 결 토

비경상 전단경계층에 관한 실험결과로서 알려진 것이 없으므로 본 연구의 수치계산 결과를 직접 비교하기는 어렵다. 그러나 혼합경계층에 관한 실험 결과와 비교하여 보면 평균속도분포와 경계층두께의 증가율은 잘 일치하고 있다. Brown-Roshko<sup>(11)</sup> 구조, 즉 2차원 와류구조가 2차원 혼합경계층의 기본구조인지 종류로부터 난류로의 천이 단계에서 나타나는 일시적 현상인지는 아직도 논란의 대상이 되고 있다. 그러나 2차원 소용돌이 구조가 혼합경계층의 발달에 깊이 관여하고 있으며, 적어도 2차원 착란(perturbation)에 대하여서는 상당히 안정되어 있는 것 같다.

혼합경계층의 두께가 증가하는 기구(mechanism)에 대해서 여러가지 주장이 있으나 필자는 와류결합에 의하여 경계층이 증가한다는 Winant 및 Browand와 견해를 같이 한다. 와류결합은 연속적으로 계속하여 일어난다고 보기는 어렵고 와류결합에 의해 만들어진 새로운 소용돌이가 평형상태에 도달할 수 있도록 충분한 정체를 지닌 다음에 다시 와류결합이 일어난다고 보아야 할 것 같다. 즉 혼합경계층은 와류결합→평형상태(정체기)→와류결합……의 단계로 발달하며 와류결합은 정체 기간에 비해 매우 짧은 기간동안에 신속하게 이루어진다.

Moore와 Saffman<sup>(13)</sup>은 난류혼입(turbulent entrainment)에 의해 와동이 서서히 커져서 어느 치수 이상이 되면, 즉  $\delta_w/\lambda$ 가 3.5 이상이 되면, 비교적 약한 와동이 주위와동들의 영향으로 분해되어 다른 와동에 흡수되므로, 와동사이의 평균간격이

증가하여  $\delta_w/\lambda$ 가 3.5 이하로 되고 와동들은 다시 커지기 시작하는 등 반복과정에 의해 혼합 경계층이 증가한다고 주장하였다. 그러나 이들의 주장은 규칙적인 형상을 가진 와류들의 정상운동이 운동방정식의 비선형성에 비추어 볼 때 생각하기 힘들 뿐만 아니라 실험에서도 관측되지 않았다.

Aref 와 Siggia<sup>(17)</sup>는 전단경계층이 와류결합에 의해서 커지는 것이 아니고 거의 일정한 크기의 와류송이들이 중심선으로부터 점점 멀어져서 전단경계층이 두꺼워진다고 주장했다. 그러나 그림5와 그림6을 보면 작은 와류송이들이 점점 큰 소용돌이로 되어가는 것을 알 수 있다. 이러한 차이가 수치해석방법상의 문제인지, 필와류의 수 때문인지는 확실치 않다. 또 Aref와 Siggia<sup>(17)</sup>의 논문에서 그림 4,5의 결과를 해석하는데는 이견이 있을 수 있을 것 같다.

## V. 결 론

전단경계층을 점와류들의 열로 근사시켜서 수치 해석하였다. 계산된 평균속도 분포와 경계층두께의 증가율은 혼합경계층에 대한 실험결과와 잘 일치하고 있으며 경계층은 와류결합에 의해 증가함을 확인 하였다. 또 와류결합은 매우 신속하게 이루어지며 와류결합과 와류결합 사이에는 만들어진 소용돌이가 평형상태에 도달하기에 충분한 시간여유가 있음도 밝혀졌다.

본 연구는 1981년도 문교부학술연구조성비의 지원을 받아 시행되었다. 또 대부분의 그림은 현대엔진공업주식회사의 전산플로터(Houston Instrument COMPLOT)를 사용하여 그렸다. 문교당국과 현대엔진공업주식회사에 감사의사를 표한다.

## 참 고 문 헌

1. Brown, G.L. and Roshko, A., J. Fluid Mech., 64, 775(1974).
2. Winant, C.D. and Browand, F.K., J. Fluid Mech., 63, 237(1974).
3. Browand, F.K. and Weidman, P.D., J. Fluid Mech., 76, 127(1976).
4. Dimotakis, P.E. and Brown, G.L., J. Fluid Mech., 78, 535(1976).
5. Wagnanski, I. et. al., J. Fluid Mech., 93, 325(1979).
6. Koochesfahani, M.M. et.al., AIAA J., 17, 1347(1979).
7. Browand, F.K. and Troutt, T.R., J. Fluid Mech., 97, 771(1980).
8. Hussain, A.K.M.F. and Clark, A.R., J. Fluid Mech., 104, 263(1981).
9. Rajagopalan, S. and Antonia, R.A., J. Fluid Mech. 105, 261(1981).
10. Roshko, A., AIAA J. 14, 1349 (1976).
11. Chandrsuda, C. et. al., J. Fluid Mech., 85, 693 (1968).
12. Saffman, P.G. and Baker, G.R., Ann. Rev. Fluid Mech., 11, 95 (1979).
13. Moore, D.W. and Saffman, P.G., J. Fluid Mech., 69, 465 (1975).
14. Pierrehumbert, R.T. and Widnall S.E., J. Fluid Mech., 102, 301 (1981).
15. Acton, E., J. Fluid Mech., 76, 561 (1976).
16. Lamb, H., Hydrodynamics, Chambridge Univ. Press (1932).
17. Aref, H. and Siggia, E.D., J. Fluid Mech., 100, 705 (1980).
18. Christiansen, J.P., J. Comp. Phys., 13, 363 (1973).
19. Rosenhead, L., Proc. Roy. Soc., A134, 170 (1932).
20. Michalke, A., Ing. Arch., 33, 264(1964).
21. Abernathy, F.H. and Kronaun, R.E., J. Fluid Mech., 13, 1 (1962).
22. Clements, R.R. and Mall. D.J., Prog. Aero. Sci., 16, 129(1975).
23. Moore D.W., J. Fluid Mech., 63, 225(1974).
24. Kiya, M. and Arie, M., J. Appl. Mech., 47, 227 (1980).
25. Chow, C.-Y., An Introduction to Computational Fluid Mechanics, Wiley (1978).
26. Zaman, K.M.B.Q. and Hussain, A.K.M.F., J. Fluid Mech., 103, 133 (1981).
27. Freymuth, P., J. Fluid Mech., 25, 683 (1966).
28. Browand, F.K. and Latigo, B.O., Phys. Fluids, 22, 1011 (1979).