

## 국부하중을 받는 원통셸의 극한해석에 관한 연구

주영우 · 이상조

기계공학과

(1980. 11. 10 접수)

### 〈요 약〉

본 연구에서는 국부하중을 받는 강완전소성체로 된 원통셸의 극한해석에 관하여 연구하였다.

축대칭 링하중과 균일한 대압력이 작용할 때, 근사화시킨 항복곡면을 사용하여 소성변형에 관한 폐형해를 구하였다. 그 해를 분석한 결과 무차원 축방향응력( $n_x = N_x / \sigma_0 H$ )이 0.3보다 크고, 무차원 대압력폭( $\xi_c = C / \sqrt{RH}$ )이 1보다 작을 때 축방향응력의 영향이 상당히 큼을 발견하였다. 무차원 축방향응력이 0.2보다 작을 때에는 이것의 영향을 무시할 수 있으며, 무차원 대압력폭이 2보다 클 경우에도 축방향응력의 영향은 매우 작아 무시할 수 있음을 알게 되었다.

소성붕괴현상을 고찰하기 위하여 극한붕괴실험을 실시하였으며, 이 실험의 결과는 정적소성붕괴이론과 비교적 잘 일치하였다.

## A Study on the Limit Analysis of Cylindrical Shell Subjected to Localized Loads

Zoo, Young Woo · Lee, Sang Jo

Dept. of Mechanical Engineering

(Received November 10, 1980)

### 〈Abstract〉

The effect of axial stress on the plastic deformation of rigid-perfectly plastic cylindrical shell under the localized load is investigated. It is assumed that the shell is constructed with the material of Tresca's yield criterion. A closed form solutions are obtained for uniform band pressure by using the circumscribed yield surface.

The analysis shows that the effect of axial stress is of considerable importance when the dimensionless axial stress ( $n_x = N_x / \sigma_0 H$ ) is greater than 0.3 and dimensionless width of band pressure ( $\xi_c = C / \sqrt{RH}$ ) is less than 1. It also appears that the effect of axial stress is negligible when the axial stress is less than 0.2 or the width of band pressure is greater than 2.

In order to observe the phenomena of plastic collapses, a static collapse experiment was conducted. According to the result of this experiment, the theory is in good agreement with the experimental result.

### 1. 서 론

극한해석 이론은 복잡한 구조물에 대한 응력분포와 변형률분포에 대한 상세한 해석을 실시하지 않고 기본적 소성항복현상만으로 구조물의 붕괴에 대

한 극한치를 계산하는 방법이다.

이 이론은 탄성해석과 같이 정밀한 것은 아니지만 탄성해석이 용이하지 않은 구조물에 대해서는 붕괴에 대한 근사치를 줄 수 있으므로 압력용기의 해석에 있어서도 널리 사용하게 되었으며 최근에 ASME CODE<sup>(1)</sup>에서도 압력용기의 설계에 극한해석법

을 채용하게 되었다.

극한해석을 통한 구조물의 해석은 많은 연구자들에 의해 이루어져 오고 있다.

Drucker와 Shield<sup>(2)</sup>는 얇은 원통셸에 대한 항복면이 축방향력을 받는 짧은 회전체 셸의 항복면에 대하여 매우 훌륭한 근사가 됨을 보였으며, Hodge<sup>(3)</sup>는 회전체 셸의 항복조건을 4차원 공간에서 하나의 표현으로 나타낼 수 있음을 보였다.

Dinno와 Gill<sup>(4)</sup>은 회전체 셸에서 극한압력에 대하여 둘레방향 곡률변화와 굽힘모멘트변화가 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

Robinson<sup>(5)</sup>은 von Mises항복조건을 따르는 재료로 된 얇은 셸의 항복면에 대한 여러가지 근사방법에 대하여 연구하였으며 Ilyushin<sup>(5)</sup>의 제안이 완전하다고 발표하였다.

원통셸의 극한해석에 관한 연구로 Onat<sup>(6)</sup>은 일단이 고정이고 타단이 자유인 원통셸의 반경방향 균일압력과 축방향 하중을 받는 경우에 있어서 극한압력을 구하였으며 원통셸의 항복면을 제시하였다.

Hodge와 Brooklyn<sup>(7)</sup>은 항복곡면을 선형화시켜 원통셸의 양단이 막힌 경우와 열린 경우의 응력과 속도분포상태를 구하는 일반적인 방법을 제시하였으며,

Augusti와 Augustino<sup>(8)</sup>는 Hodge와 Brooklyn의 결과에 대하여 실험하여 실험치가 이론치에 잘 일치됨을 확인하였다.

Coon과 Gill<sup>(9)</sup>은 양단이 막힌 긴 원통셸이 내압과 둘레방향의 선하중을 받을 때 원통셸의 극한하중에 기하학적 변화가 미치는 영향에 대해 연구하였다.

Ho와 Updike<sup>(10)</sup>는 원통셸의 소성붕괴시에 발생하는 응력장과 속도장식을 각항복면에 대하여 구하였고, Haydl과 Sherbourne<sup>(11)</sup>은 외팔보 원통셸의 극한해석을 위한 수치해석법을 제시하였다.

린하중 및 내압력과 같은 국부하중을 받는 원통셸에 대한 극한해석을 Drucker<sup>(12)</sup>가 하였고, Demir와 Drucker<sup>(13)</sup>는 강과 알루미늄합금셸의 경우를 실험하여 Drucker의 이론치와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 그러나 이들은 원통셸의 길이가 아주 긴 것으로 가정하였고, 축방향응력을 고려하지 않았다.

본 연구에서는 축방향응력을 고려한 항복곡면을 정의하여 보다 정밀한 해석을 하고 축방향응력의 영향을 검토하기 위하여 국부하중을 받는 원통셸의 붕

괴실험을 실시하였다.

## II. 이 론

### 1. 원통셸의 기하학적 특성

본 연구에서 다루려는 원통셸은 Fig.1과 같다. 하중은 원통셸의 내부에서 축대칭으로 작용한다고 가정하며, 따라서 변위는 반경방향변위  $W$ , 축방향변위  $U$  만정의된다. 재료는 Tresca의 항복조건을 따르는 강완전소성체로 간주하며 충분한 연성을 가져 파단이 일어나지 않는 것으로 한다.

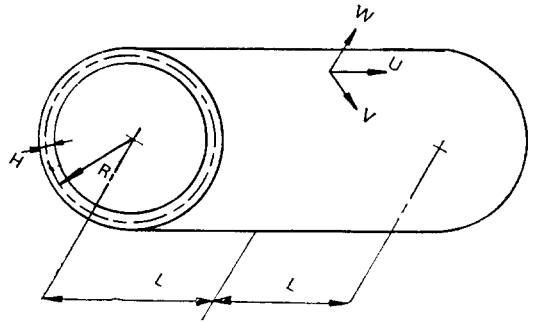


Fig.1 Geometry of the cylindrical shell.

### 2. 평형방정식

원통셸이 축대칭 하중을 받을 때 셸요소의 응력상태는 Fig.2와 같다.

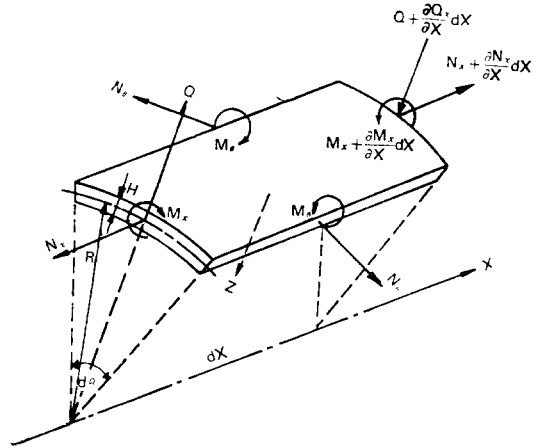


Fig.2 Stress resultants of the shell element.

하중은 표면에 수직으로만 작용한다고 하면 이때의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x}{dX} &= 0 \\ \frac{dQ_x}{dX} + \frac{N_\theta}{R} &= P \\ \frac{dM_x}{dX} - Q_x &= 0 \end{aligned} \right\} (1a, b, c)$$

여기서  $Z$ 는 반경방향력이다. 식(1a)는  $N_x$ 가 일정(또는 영)하면 항상 성립하므로 나머지 두 식으로부터 다음 방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2 M_x}{dX^2} + \frac{N_\theta}{R} = P \quad (2)$$

이론의 전개에서 무차원화된 변수를 사용하는 것이 기술의 단순화를 꾀하며, 여러가지 경우를 편리하게 나타낼 수 있으므로 많은 연구자에 의해 이용되고 있다. 본 논문에서도 다음과 같이 정의되는 무차원변수를 사용한다.

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{M_x}{\sigma_0 H^2} & n_\theta &= \frac{N_\theta}{\sigma_0 H} & q &= \frac{Q_x}{\sigma_0 H} \sqrt{\frac{R}{H}} \\ n_x &= \frac{N_x}{\sigma_0 H} & \phi &= \frac{PR}{\sigma_0 H} \\ \xi &= \frac{X}{\sqrt{RH}} & \xi_c &= \frac{C}{\sqrt{RH}} \end{aligned} \right\} (3)$$

식(2)를 위에서 정의한 무차원변수로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2 m}{d\xi^2} = \phi - n_\theta \quad (4)$$

### 3. 항복곡면과 유동법칙

Tresca 항복조건을 따르는 재료로 된 원통형의 완전한 항복곡면은 Fig. 3과 같다.<sup>(6)</sup> 그러나 원통형의 소성해석을 실시함에 있어 Fig. 4와 같이 근사화시킨 항복곡면을 사용하는 것이 일반적이다.<sup>(14-17)</sup>

본 연구에서는  $n_x = \text{일정}$  이므로 항복곡면은 Fig. 4에서의  $Z$ 평면상에 나타나는 곡선으로 된다. 본 연구에서 사용한 항복곡선을 Fig. 5에서 보여준다. Fig. 5에서 점선으로 나타낸 것은 Fig. 3에서 정의된 정밀한 항복곡면으로 얻어진 것이다. 폐형해를 얻기 위해서는 Fig. 5의 실선으로 표시된 근사항복곡선을 사용한다.

소성역에서 탄성변형은 소성변형에 비하여 극히 작으므로 무시하고 변형율속도는 소성변형율속도로 표시한다. 변형율속도는 소성변형하는 중에 유동법칙에 의해 항복곡면에 수직되어야 한다.

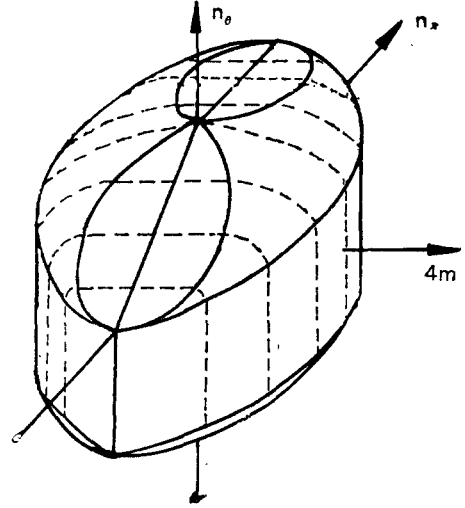


Fig. 3 Yield surface for the cylindrical shell.

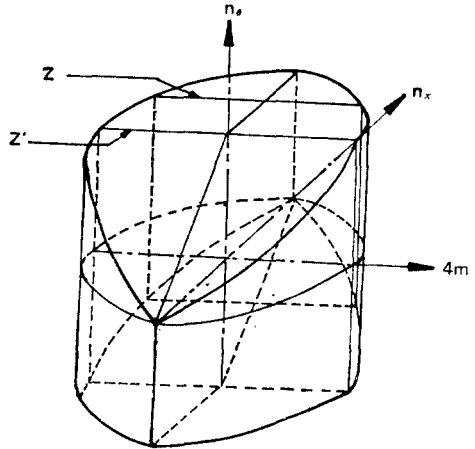


Fig. 4 Circumscribed yield surface for the cylindrical shell.

변형율속도벡터는  $\dot{E} = \mu(\dot{e}_x, \dot{e}_\theta, \dot{k})$ 로 정의되며, Fig. 5에서 응력점은 항복곡선 A와 B의 사이에 놓이게 된다. 여기서  $\mu$ 는 비례상수이다.

AD상의 변형율속도벡터  $\dot{E}_{AD}$ 와 AB상의 변형율속도벡터  $\dot{E}_{AB}$  및 BC상의 변형율속도벡터  $\dot{E}_{BC}$ 는 각각  $\dot{E}_{AD} = \mu_{AD}(2n_x, 0, -4)$ ,  $\dot{E}_{AB} = \mu_{AB}(0, 1, 0)$ ,  $\dot{E}_{BC} = \mu_{BC}(2n_x, 0, 4)$ 이므로 점 A에서 변형율속도벡터는  $\dot{E}_{AD}$ 와  $\dot{E}_{AB}$ 의 벡터합으로 표시되며, 점 B에서

민원속도벡터는  $\dot{E}_{BC}$ 와  $\dot{E}_{AB}$ 의 벡터합으로 표시된다.

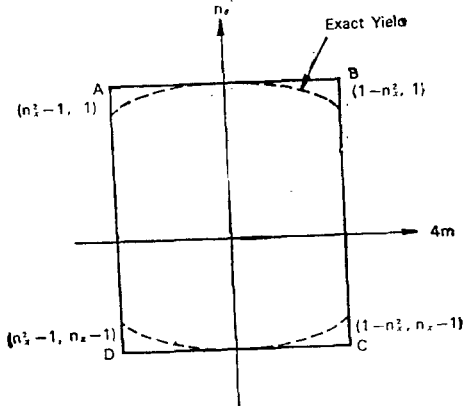


Fig. 5. Z Yield curve.

4. 국부작용하중에 대한 극한해석

본 절에서는 국부작용하중을 받는 원통형의 정적 소성거동을 해석하기 위하여 축방향응력  $N_x$ 를 받는 원통형에서 링하중  $F$ 와 균일한 대압력  $P$ 를 받을 때의 극한하중을 구한다.

(1) 링하중

Fig. 6(a)와 같이 원통형이 링하중  $F$ 를 받을 경우에 극한하중  $F_s$ 를 구한다. 이 경우에 하중은 정적인 선하중이므로  $\phi=0$ 이고, Fig. 5의 항복곡선에서 응력집이  $AB$ 상에 놓이게 되므로  $n_\theta=1$ 이 된다. 그러므로 평형방정식은 식(4)로부터

$$\frac{d^2m}{d\xi^2} = -1 \tag{5}$$

이 얻어지며, 식(5)를  $\xi$ 에 관하여 적분하면

$$m = -\frac{1}{2}\xi^2 + C_1\xi + C_2 \tag{6}$$

을 얻는다. 여기서  $C_1$ 과  $C_2$ 는 적분상수이다.

하중이 작용하는 위치를 좌표의 원점으로 하면 무차원링하중  $f$ 로 인하여  $\xi=0$ 에서 불연속강도가  $f$ 가 되고 또한 전단력은  $\xi=0$ 에서

$$\frac{dm}{d\xi} = \frac{f}{2}$$

가 된다.

원통형이 링하중을 받을 때 붕괴기구는 Fig. 6(b)와 같으며  $\xi=0$ 와  $\xi=\xi_0$ 에서 소성현지가 생긴다. 이 경우에 기하학적으로 가능한 경계조건

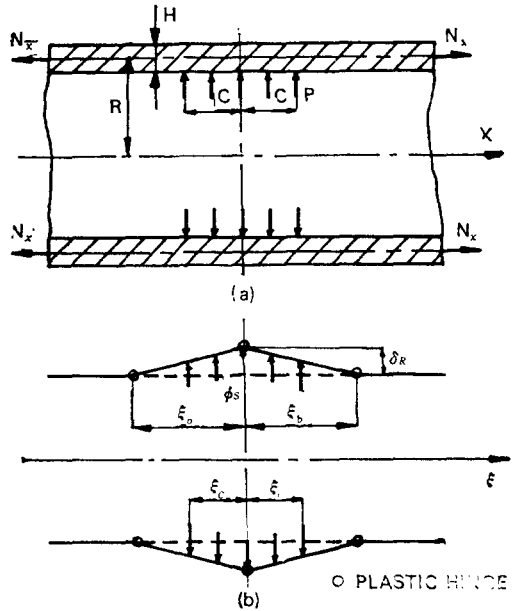


Fig. 6. (a) Ring Force  
(b) Kinematic Pattern.

$$\left. \begin{aligned} \xi=0 \text{에서 } m &= \frac{n_x^2-1}{4} \\ \xi=\xi_0 \text{에서 } m &= \frac{1-n_x^2}{4} \end{aligned} \right\} \tag{8a, b}$$

을 만족시켜야 하며,  $\xi=\xi_0$ 에서  $m$ 이 최대가 되어야 하므로  $\xi=\xi_0$ 에서

$$\frac{dm}{d\xi} = 0 \tag{9}$$

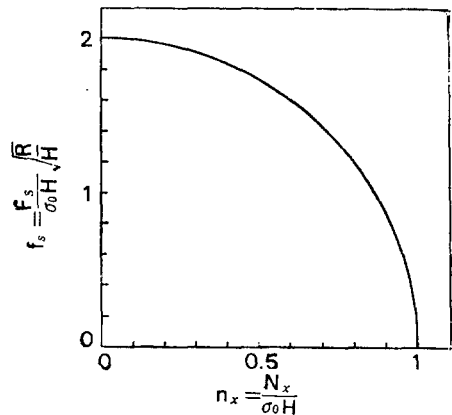


Fig. 7 Limit ring force  $f_s$  vs. axial stress  $n_x$ .

가 된다. 조건식(7)과 (8) 및 (9)를 만족시키는 링 하중  $f$ 는 극한링하중  $f_s$ 가 되며,  $f_s$ 와 소성힌지위치  $\xi_b$ 는

$$\xi_b = \sqrt{1 - n_x^2} \quad (10)$$

$$f_s = 2\sqrt{1 - n_x^2} \quad (11)$$

로 주어진다.

축방향응력  $n_x$ 가 극한링하중  $f_s$ 에 미치는 영향을 보여주기 위하여 식(11)을 Fig. 7에 표시하였다.

(2) 대압력

Fig. 8(a)와 같이 원통셀에 균일한 대압력  $P$ 가 폭  $2C$ 에 작용할 때 극한대압력  $P_s$ 를 구한다.

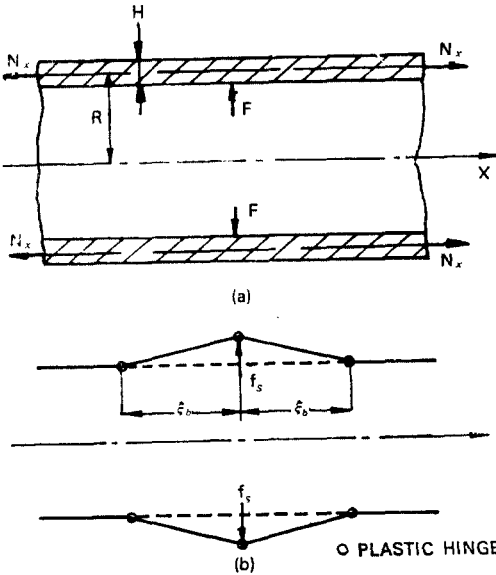


Fig. 8 (a) Band pressure  
(b) Kinematic pattern

이 경우에 붕괴기구는 Fig. 8(b)와 같이 되어 소성역이 대폭보다 크게 되므로 평형방정식을 두 구간으로 나눈다. 압축이 작용하는 구간에서의 모우멘트를  $m_1$ , 압력이 작용하지 않는 구간에서의 모우멘트를  $m_2$ 라고 하면,

$$0 \leq \xi \leq \xi_c \text{ 에서 } \frac{d^2 m_1}{d\xi^2} = \phi - n_0 \quad (12)$$

$$\xi_c \leq \xi \leq \xi_b \text{ 에서 } \frac{d^2 m_2}{d\xi^2} = -n_0 \quad (13)$$

로 된다.

$\xi=0$ 와  $\xi=\xi_b$ 에서 소성힌지가 발생하며 응력점은

Fig. 5의 항복곡면에 놓이게 되므로  $n_\theta=1$ 이고 경계 조건은

$$\left. \begin{aligned} \xi=0 \text{에서 } m &= \frac{n_x^2 - 1}{4}, \quad \frac{dm}{d\xi} = 0 \\ \xi=\xi_b \text{에서 } m &= \frac{1 - n_x^2}{4}, \quad \frac{dm}{d\xi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14a, b)$$

이다.

$\xi=\xi_c$ 에서는  $m$ 과  $\frac{dm}{d\xi}$ 의 값의 일치하여야 하므로

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm_1}{d\xi} &= \frac{dm_2}{d\xi} \\ m_1 &= m_2 \end{aligned} \right\} \quad (15a, b)$$

의 연속조건식을 얻는다.

식(12)와 (13)을 적분하면

$0 \leq \xi \leq \xi_c$ 에서

$$m_1 = \frac{\phi - 1}{2} \xi^2 + C_{11}\xi + C_{12} \quad (16)$$

$\xi_c \leq \xi \leq \xi_b$ 에서

$$m_2 = -\frac{1}{2} \xi^2 + C_{21}\xi + C_{22} \quad (17)$$

을 얻으며 여기서  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$ 는 적분상수이다.

식(14)와 (15)를 만족시키는 대압력  $\phi$ 가 극한대압력  $\phi_s$ 가 되므로 식(16)과 (17)로부터  $\xi_b$ 와  $\phi_s$ 를 구

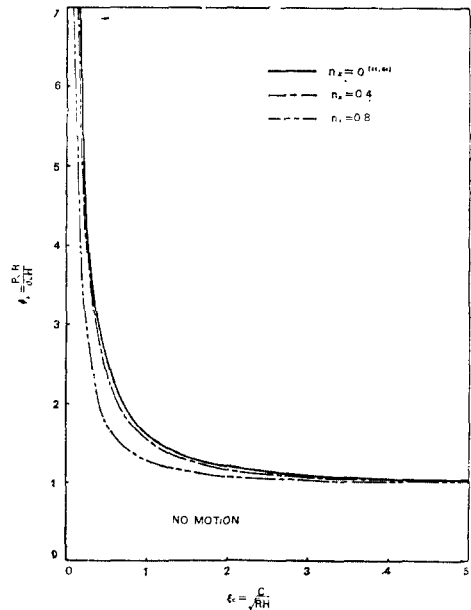


Fig. 9 Limit band pressure  $\phi_s$  vs. band width  $\xi_c$  with various axial stresses.

하면

$$\xi_s = \frac{\xi_c}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4(1-n_x^2)}{\xi_c^2}} \right] \quad (18)$$

$$\phi_s = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4(1-n_x^2)}{\xi_c^2}} \right] \quad (19)$$

를 얻는다. 극한대압력  $\phi_s$ 에 대한 축방향응력  $n_x$ 의 영향을 보여주기 위하여 식(19)를 Fig.9에 표시하였다. Fig.9는 극한대압력  $\phi_s$ 와 그때의 대폭  $\xi_c$ 와의 관계를 나타낸다. 이 곡선의 상부영역을 소성변형이 진행될 수 있는 영역이고, 하부영역은 소성변형이 일어날 수 없는 영역이다.

축방향응력의 존재로 인하여 이 한계가 아래로 낮아짐을 알 수 있다. 식(19)를 다시 축방향응력  $n_x$ 와 극한대압력  $\phi_s$ 에 관하여 표시하며 Fig.10과 같다.

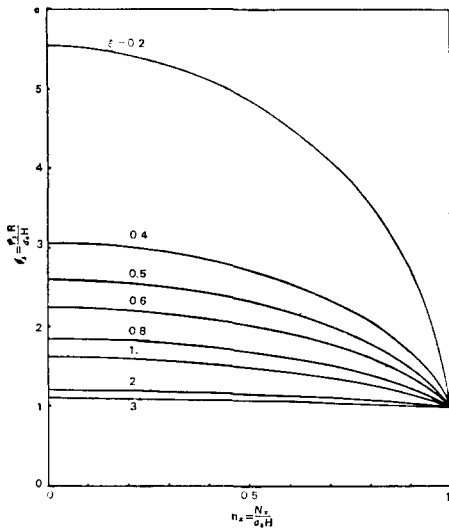


Fig. 10. Limit band pressure  $\phi_s$  vs. axial stress  $n_x$  with various band widths.

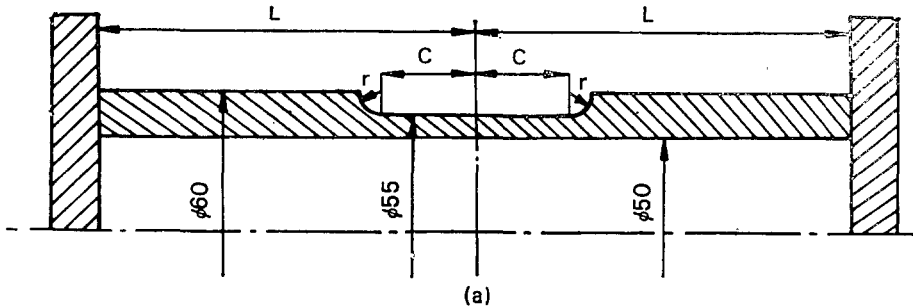


Fig. 11 (a) Geometry of specimen.

### Ⅲ. 극한붕괴실험

정적대압력을 받는 원통셀의 극한압력에 미치는 축방향응력의 영향을 실험적으로 고찰하기 위하여 극한붕괴실험을 실시하였다. 실제로 원통셀에 대압력을 가할 수 없으므로 균일압력을 받는 원통셀의 두께를 국부적으로 감소시켜 국부변형을 발생시킴으로서 대압력을 받는 원통셀의 변형으로 상사시켰다.

#### 1. 실험방법

실험에 사용한 시편은 이음매 없는 강관을 Fig.11과 같이 안지름 50mm, 얇은 부분의 바깥지름 55mm 두꺼운 부분의 바깥지름 60mm가 되도록 가공하고 양단에 두께 10mm의 강판을 용접하였다.

시편 중앙부의 얇은 부분의 폭(2C)을 다섯종류로 하였다.

재료의 항복응력은 Tinius Olsen 단능재료시험기를 측정하였으며 항복응력은 0.2% 영구변형의 항복강도를 취하였다.

각 종 시편의 치수 및 항복응력을 Table 1에서 보여준다.

시편에는 최고압력 560kgf/cm<sup>2</sup>의 수동유압펌프로 가압하여 시편에 국부적 변형을 발생시켰으며, 시편의 변형은 1/100mm 다이알게이지를 시편의 중앙부와 두꺼운 부분에 반경방향으로 6개, 시편의 자유단에 축방향으로 1개를 설치하여 반경방향변위와 축방향변위를 측정하였다.

원통셀이 탄성역에 있는 동안은 압력을 35kgf/cm<sup>2</sup>씩 증가시키면서 변위를 측정하였으며, 소성변형이 나타나기 시작한 후에는 매 14kgf/cm<sup>2</sup>의 압력증가

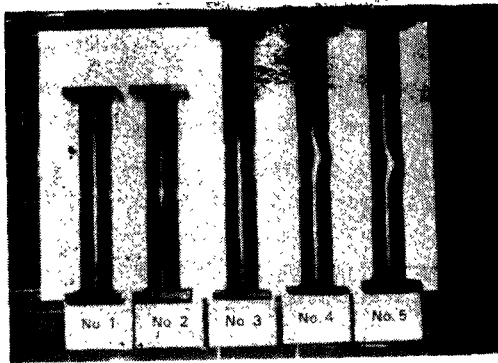


Fig.11 (b) Photograph of the specimens



Fig.12 Photograph of Experimental setup.

Table 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Test No.	2L mm	2C mm	H mm	R mm	$\frac{\xi_c}{\dot{C}} \sqrt{\frac{R}{H}}$	$\sigma_0$ kg/inm <sup>2</sup>	$\frac{n_s P_s R}{2\sigma_0 H}$	$P_s$ kg/cm <sup>2</sup>	$\frac{\phi_{or}}{P_s R} \frac{P_s R}{\sigma_0 H}$	$\phi_{th} E_q \cdot (19)$	$\phi_D$ Ref.(12)	$P_B$ kg/cm <sup>2</sup>
1	370	11.0	2.5	26.25	0.679	29.4	0.816	477	1.63	1.55	2.03	—
2	370	15.0	2.5	26.25	0.926	29.4	0.736	412	1.47	1.42	1.69	—
3	500	52.0	2.5	26.25	3.21	29.4	0.572	321	1.14	1.06	1.09	—
4	500	100.	2.5	26.25	6.17	29.4	0.560	314	1.12	1.02	1.03	422
5	500	200.	2.5	26.25	12.33	29.4	0.525	300	1.07	1.00	1.007	395

- Column (1) Specimen Numbers
- (2)-(6) Geometrical Dimensions and Parameters
- (7) Yield Stress
- (8) Experimental Axial Stress Resultant
- (9) Experimental Limit Pressure
- (10) Dimensionless Experimental Limit Pressure
- (11)-(12) Dimensionless Theoretical Limit Pressure
- (13) Bursting Pressure

마다 변위를 측정하였다.

시편 No.1, No.2, No.3는 극한압력이 명백히 나타날 때까지 실험하였으며, 시편 No.4, No.5는 파열이 일어날 때까지 실험하였다.

2. 실험결과 및 분석

실험결과를 Table 1에 정리하였다. 축방향과 두꺼운 부분의 반경방향변위는 기대하였던 바와같이 무시할 수 있었고 중앙부의 얇은 부분에만 국부적 변위가 일어남으로써 대압력을 받는 원통형의 변형에 상사시킬 수 있었다.

실험에서 극한압력은 Fig.13에서와 같이 탄성역과 소성역의 압력-변위곡선에 그은 두 점선의 교

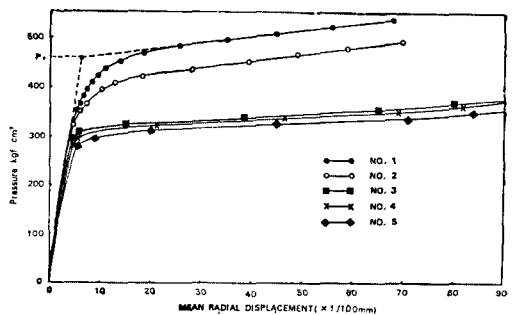


Fig.13 Experimental pressure-displacement diagrams.

점으로 정의하였다. (8)

대압력의 폭 2C는 중앙부의 얇은 부분의 평행부의 길이로 하였으며, 축방향응력  $n_x$ 는 극한압력에서의 압력에 의한 축방향응력치로 하였다.

이들 극한압력은 축방향응력  $n_x=0$ 인 경우의 Drucker<sup>(12)</sup>의 이론치  $\phi_0$  및 본 논문의 이론치 [식 (19)]  $\phi_{th}$ 와 실험을 통하여 측정된 극한압력  $\phi_{se}$ 를 비교하여 Table 1에 표시하였으며 Fig. 14에 그래프로 보여준다.

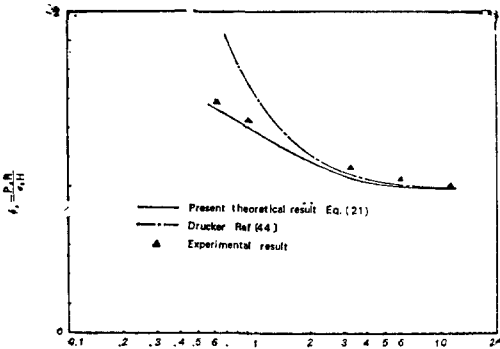


Fig. 14 Limit pressure  $\phi_s$  vs. band width  $\xi_c$

Ⅶ. 결 토

국부적 하중을 받는 원통셸의 소성거동을 규명하기 위하여 항복곡면으로 부터 무차원 축방향응력  $n_x$  = 일정인 경우의 항복곡면을 Fig. 5와 같이 정의하였다. 축방향응력의 영향은 이 극선상에서 항복굽힘 모멘트  $m$ 의 값을  $\frac{1}{4}$ 로부터  $\frac{1-n_x^2}{4}$ 로 축소시키는 효과를 가져오며, 이에 따라 원통셸의 극한압력과 임계압력에 큰 영향을 가져온다.

Fig. 9를 고찰하면 축방향응력의 존재로 인하여 일반적으로 극한대압력이 낮아짐을 알 수 있다. 한편 대폭의 영향을 Fig. 10에서 보여준다. 이 그림에서 보면  $n_x > 0.3$ 에서는 축방향응력의 영향이 뚜렷하나  $\xi_c > 2$ 인 경우에는  $n_x$ 의 영향이 무시할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 축방향응력의 영향은 국부적 변형을 가져오는 경우에는 전대로 무시할 수 없음이 명백하여진다. 이와 같은 사실은 극한붕괴실험결과에서도 명백히 나타난다. Fig. 14에서의 실험결과를 보면  $\xi_c > 2$ 인 경우 실험치는 Drucker<sup>(12)</sup>의 이론치와 잘 일치하나  $\xi_c < 2$ 에서는 본 논문의 이론치와 비

교적 잘 일치한다.

V. 결 론

국부극한하중을 받는 원통셸의 소성거동에 축방향응력이 미치는 영향을 연구하였다.

재료는 Tresca의 항복조건을 따르는 강원전소성체로 가정하여 이론식을 유도하였다.

대압력을 받는 원통셸의 극한하중은  $n_x=0$ 인 경우 Drucker<sup>(12)</sup>의 에너지법에 의하여 구한 결과와 같았으며  $n_x > 0.3$ 인 경우에는 하중이 국부적일수록 축방향응력의 영향을 무시할 수 없다. 따라서 국부하중을 받는 원통셸의 설계에서  $n_x$ 의 영향을 고려하므로 보다 정확한 극한 하중을 결정할 수 있다.

참 고 문 헌

1. ASME, ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII, Division 2, ASME, New York, 1976.
2. Drucker, D.C., and Shield, R.T., "Limit Analysis of Symmetrically Loaded Thin Shells of Revolution," J. Applied Mechanics, Trans. ASME, March 1959, pp.61-68.
3. Hodge, P.G. Jr., "Yield Conditions for Rotationally Symmetric Shells Under Axisymmetric Loading", J. Applied Mechanics, Trans. ASME, June 1960, pp.323-331.
4. Dinno, K.S., and Gill, S.S., "The Effect of the Circumferential Bending Moment and Change of Circumferential Curvature on the Calculation of the Limit Pressure of Symmetrically Loaded Shells of Revolution", Int. J. Mech. Sci., Vol.7, 1965, pp.15-19.
5. Robinson, M., "A Comparison of Yield Surfaces for Thin Shells," Int. J. Mech. Sci., Vol. 13, 1971, pp.345-354.
6. Onat, E.T., "Plastic Collapse of Cylindrical Shells under Axially Symmetrical Loading", Quart. Appl. Math., Vol.13, 1955, pp.63-72.
7. Hodge, P.G. Jr., and Brooklyn, N.Y., "Rigid-Plastic Analysis of Symmetrically



- Loaded Cylindrical Shells," *J. Appl. Mechanics*, Vol.21, pp.336—342, 1954.
8. Augusti, G., and Augustino, S., "Experiments on the Plastic Behavior of Short Steel Cylindrical Shells subjected to Internal Pressure", *First Int. Conf. on Pressure Vessel Technology 1970. Pressure Vessels and Piping: Design and Analysis*, Vol. 1, ASME, 1972, pp.363—375.
  9. Coon, M.D., and Gill, S.S., "The Effect of Change of Geometry on the Rigid-Plastic Limit Load of Cylinders", *Int. J. Mech. Sci.* Vol.10, 1968, pp.355—368.
  10. Ho, H.S., and Updike, D.P. "Limit Analysis for Combined Edge and Pressure Loading on a Cylindrical Shell", *J. Eng. for Industry Trans. ASME*, Nov. 1971, pp.998—1006.
  11. Haydl, H.M. and Sherbourne, A.N., "Rigid-Plastic Collapse of Cylindrical Shells", *J. Engineering for Industry, Trans. ASME*, Feb. 1973, pp215—218.
  12. Drucker, D.C., "Limit Analysis of Cylindrical Shells under Axially Symmetric Loading", *Proc. First Midwest Conf. Solid and Mechanics*, 1953, pp.158—163.
  13. Demir, H.H., and Drucker, D.C., "An Experimental Study of Cylindrical Shells under Ring Loading," *Process in Applied Mech.*, Macmillan, New York, 1968, pp.205—220.
  14. Eason, G., and Shield, R.T., "Dynamic Loading of Rigid-Plastic Cylindrical Shells", *J. Mech. Phy. Solid*, Vol.4, 1956, pp53—71.
  15. Youngdahl, C.K., "The Equivalence of Dynamic Loads for the Final Plastic Deformation of a Tube" *Proc. First int. Conf. on Pressure Vessel Technology, CONF-690906*, Vol.1, Oct. 1969, pp.89—100.
  16. Youngdahl, C.K., "Correlation Parameters for Eliminating the Effect of Pulse Shape on Dynamic Plastic Deformation," *J. Applied Mechanics, Trans. ASME*, September 1970, pp.744—752.
  17. Youngdahl, C.K., "Dynamic Deformation of Circular Cylindrical Shells", *J. Applied Mechanics, Trans. ASME*, September 1972, pp.746—750.