



## 저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#) 

공학석사학위논문

2차원 날개 단면 주위의  
정상유동해석 향상을 위한  
B-spline 및 부분선형 패널법의 적용  
( Application of Piecewise Linear Panel Method  
with B-spline curve for improvement of steady flow  
analysis around two dimensional foil sections )

울산대학교 대학원

조선해양공학부

이 동 현

2차원 날개 단면 주위의  
정상유동해석 향상을 위한  
B-spline 및 부분선형 패널법의 적용

지도교수 이 진 태

이 논문을 공학석사 학위 논문으로 제출함

2017년 11월

울산대학교 대학원

조선해양공학부

이 동 현

이동현의 공학석사 학위논문을 인준함

심사위원 이 진 태 (인)

심사위원 정 노 택 (인)

심사위원 신 동 목 (인)

울산대학교 대학원

2017년 11월

# ABSTRACT

The panel method has been widely used as a very useful method for analyzing steady fluid-flow around 2D sections.

There are some ways. One has a constantly distributed singularity's strength in panels(called Constant strength Panel Method, CPM). Another has a linearly distributed dipole's strength called the Piecewise Linear Panel Method to solve the problem with CPM that is a discontinuity of dipole strength between adjacent panels

But the disadvantage of existing panel methods are that it is only possible to calculate geometry information expressed in a two dimensional (x,y) coordinate , potential, perturbation velocity at the center of panel or the node where panel is generated. In other words, It is impossible to calculate any variables except these points. therefore, in this paper We will use B-spline based on piecewise linear panel method to calculate some variables at any point in the panel and compare with the conventional panel method and analytic solution to compare the accuracy.

Also, the derivatives of B-spline performing an analytic differential is used to improve the accuracy of the perturbation velocity obtained by the slope of the one-dimensional straight line called simple difference. After getting some values, we will estimate the accuracy by performing 'Error Analysis' as a method to compare with the conventional simple difference and analytic solution.

# 목 차

<b>ABSTRACT</b> .....	i
<b>TABLE OF CONTENTS</b> .....	ii
<b>LIST OF FIGURES</b> .....	v
<b>LIST OF TABLES</b> .....	viii
<b>1 Introduction</b> .....	9
<b>2 Governing Equation</b>	
2.1 Assumption & Boundary Condition.....	10
2.2 Fundamental Equations .....	12
<b>3 Piecewise Linear Panel Method</b>	
3.1 Introduction .....	14
3.2 Discrete of the Singularity Distribution.....	15
3.3 Kutta Condition .....	18
3.2.1 Set up 'A-matrix' .....	19
3.4 Definition of Coordinate in local and global .....	19
3.5 Influence Coefficient .....	21
3.6 Position of Control Point .....	22
<b>4 Uniform Rational B-Spline</b>	
4.1 Introduction .....	24
4.2 The Definition of B-Spline Basis Function .....	24
4.2.1 Basis Function .....	24
4.2.2 Knot Vector .....	26
4.2.3 Knots .....	27

4.2.4	Verification .....	28
4.3	The Derivative of B-Spline Basis Function .....	29
4.3.1	Introduction .....	30
4.3.2	The k-th derivatives of the Basis Function .....	31
4.3.3	Verification .....	31
<b>5</b>	<b>Error Analysis</b>	
5.1	Introduction .....	32
5.2	Deviation .....	32
5.3	Calculation Position .....	33
	<b>Force</b> .....	35
<b>6</b>	<b>Results and Discussion</b>	
7.1	Results	
7.1.1	Geometry .....	36
7.1.2	Potential .....	38
7.1.3	Perturbation Velocity .....	42
7.1.4	Pressure Coefficient .....	45
7.1.5	Error Analysis .....	49
7.1.6	Force .....	50
7.2	Discussion .....	52
	<b>REFERENCES</b> .....	53

## Appendix

### A. PANEL CODE의 검증

#### A.1 Influence Coefficient

A.2.1 Deriving Influence Coefficient	
A.2.1.1 Constantly Distributed Singularity Strength .....	54
A.2.1.2 Linearly Distributed Singularity Strength .....	55
A.2.2 Convergence Test .....	58
<b>B. Order Effect .....</b>	<b>60</b>
<b>C. Differential at 1st and <math>(N+1)st</math> points .....</b>	<b>62</b>



# LIST OF FIGURES

- Fig. 1 Notation for a general geometry for the application of Green's Theorem
- Fig. 2 Representation of a general airfoil with straight line segments(Panels)
- Fig. 3 Naming for local coordinate systems
- Fig. 4 Description of Constant and Linear Strength in adjacent panels
- Fig. 5 DR dipole influence coefficients
- Fig. 6 DL dipole influence coefficients
- Fig. 7 Self-Induction for linear dipole strength ( in piecewise linear panel method )
- Fig. 8 Self-Induction at  $1_{st}$  and  $(N+1)_{th}$  Node
- Fig. 9 Notation for Kutta Condition at the trailing edge
- Fig. 10 The Local and Global Coordinate systems about a panel
- Fig. 11 Potential comparison of circle using two kinds of control point(center vs node)
- Fig. 12  $1_{st}$  Order Basis Function with 12 knots
- Fig. 13  $3_{rd}$  Order Basis Function with 12 knots
- Fig. 14 Circle Geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve
- Fig. 15 Symmetric Foil Geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve
- Fig. 16 Cambered Foil Geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve
- Fig. 17 Slope of a circle( $= \frac{dy}{dx}$ ) at nodal point using simple difference and the derivative of  
a  $2_{nd}$  B-Spline Curve
- Fig. 18 a Karman-Trefftz section at the trailing edge ( $\tau_D = 25^\circ$ ,  $x_c = 0.3$   $y_c = 0.0$ )
- Fig. 19 The verification of the geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)
- Fig. 20 The verification of the geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 21 The verification of the geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 22 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order  
B-Spline Curve (Circle)
- Fig. 23 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order  
B-Spline Curve (Circle)

- Fig. 24 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 25 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 26 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 27 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 28 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)
- Fig. 29 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)
- Fig. 30 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 31 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 32 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 33 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 34 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients( $-C_p$ ) using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)
- Fig. 35 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients( $-C_p$ ) using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)
- Fig. 36 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients( $-C_p$ ) using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 37 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients( $-C_p$ ) using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)
- Fig. 38 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients( $-C_p$ ) using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 39 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients( $-C_p$ ) using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)
- Fig. 40 The verification of the piecewise linear panel method using Convergence Test (Potential, Symmetric Foil)

- Fig. 41 The verification of the piecewise linear panel method using Convergence Test (Perturbation Velocity, Symmetric Foil)
- Fig. 42 The verification of the piecewise linear panel method using Convergence Test (Pressure Coefficients, Symmetric Foil)
- Fig. 43 Research results for order effect about potential (Symmetric foil)
- Fig. 44 Research results for order effect about perturbation velocity (Symmetric foil)
- Fig. 45 Research results for order effect about pressure coefficients (Symmetric foil)
- Fig. 46 Description of a trailing edge in a symmetric foil for the differential at  $1_{st}$  and  $(N+1)_{th}$  Node

# LIST OF TABLES

- Table. 1 Matrix Condition number of  $A_{ij}$
- Table. 2 Order Arrangement
- Table. 3 Slope of Circle at Leading edge and Trailing edge
- Table. 4 Input data for generating various Karman-Trefftz sections
- Table. 5 When Angle of attack =  $0^\circ$ , Standard Deviation of Perturbation Velocity and Pressure Coefficients about Circle
- Table. 6 When Angle of attack =  $90^\circ$ , Standard Deviation of Perturbation Velocity and Pressure Coefficients about Circle
- Table. 7 When Angle of attack =  $0^\circ$ , Standard Deviation of Perturbation Velocity and Pressure Coefficients about Symmetric Foil
- Table. 8 When Angle of attack =  $90^\circ$ , Standard Deviation of Perturbation Velocity and Pressure Coefficients about Symmetric Foil
- Table. 9 When Angle of attack =  $0^\circ$ , Standard Deviation of Perturbation Velocity and Pressure Coefficients about Cambered Foil
- Table. 10 When Angle of attack =  $90^\circ$ , Standard Deviation of Perturbation Velocity and Pressure Coefficients about Cambered Foil
- Table. 11 When Angle of attack =  $0^\circ$ , Lift and Drag Coefficients and Gamma about Circle
- Table. 12 When Angle of attack =  $90^\circ$ , Lift and Drag Coefficients and Gamma about Circle
- Table. 13 When Angle of attack =  $0^\circ$ , Lift and Drag Coefficients and Gamma about Symmetric Foil
- Table. 14 When Angle of attack =  $90^\circ$ , Lift and Drag Coefficients and Gamma about Symmetric Foil
- Table. 15 When Angle of attack =  $0^\circ$ , Lift and Drag Coefficients and Gamma about Cambered Foil
- Table. 16 When Angle of attack =  $90^\circ$ , Lift and Drag Coefficients and Gamma about Cambered Foil

# 1. Introduction

2차원 단면 주위의 비점성 유동에 대한 해석방법으로 전통적으로 패널법이 널리 사용되어져 왔다. 하지만 최근 컴퓨터 성능의 비약적인 발전을 힘입어 전산유동해석기법(CFD, Computational Fluid Dynamics)이 2차원 단면 주위의 유동 해석 뿐만 아니라 다양한 분야에 걸쳐 해석방법으로 활용되고 있다. 그러나 해석하고자 하는 대상의 격자의 구성방법 및 개수, 해석프로그램 등 여러 요인이 해석에 많은 영향을 끼쳐 그 정도의 신뢰도를 보장하고 확인하는데 제한이 있고 해석에 걸리는 시간이 패널법과 비교하여 상당히 오래 걸린다는 단점이 있어 패널법은 여전히 해석방법으로써 유용하고 효과적인 수단으로써 가치가 있다고 말할 수 있다.

일반적인 패널법은 각 패널에 강도가 일정한 균일강도 패널법(Constant Panel Method)이 주로 사용되고 있다. 그러나 균일강도의 경우, 패널 간 다이폴 세기의 불연속이 패널에 걸쳐 발생하여 결과의 정확도에 영향을 주게 된다. 이를 보완하기 위해 다이폴의 강도를 각 패널에 걸쳐 선형적으로 분포시키는 부분 선형강도 패널법(Linear Panel Method)이 개발 되었다. 그러나 이 또한 아쉬운 점이 있다면 패널이 생성되는 질점(Node)에서는 계산이 가능하지만 그 외 패널 내의 임의의 점에서의 계산은 불가능하다.

본 연구에서는 2차원 단면 주위의 비점성 유동해석에 대해 기존의 패널법을 각 패널에 걸쳐 선형적으로 변하는 다이폴(Dipole) 특이점의 세기분포를 가지는 부분선형 패널법으로 발전시키고, 그 결과를 바탕으로 B-spline 적용하여 임의의 점에서 계산이 가능하도록 하였다.

부분 선형강도 패널법을 바탕으로 B-spline을 활용한 새로운 방법에 의한 기대효과는 첫 번째로 다이폴 특이점의 세기 분포가 노드(Node) 중심으로 연속으로 바뀌게 되어 단차로 인한 오류가 줄고, 두 번째로 2차원 곡선의 B-spline curve를 활용함으로써 패널법만 사용하였을 때 보다 유동해석의 정도 향상을 기대하였다.

## 2. Governing Equations

### 2.1 Assumption & Boundary Condition

패널법으로 문제를 풀 때에 2차원의 유동장을  $V$ , 그 경계면을  $S$ , 유동장내에 위치하고 패널과 유동장의 경계면에서 유동장 방향을 향하는 법선벡터를  $\vec{n}$ 으로 둔다. 경계면  $S$ 는 물체의 표면(Body surface)  $S_B$ , 후류 면(Wake surface)  $S_W$ , 그리고 물체표면과 후류 면 주변의 외부면(Outer control surface)  $S_\infty$ 으로 구성된다. 또한 물체를 향하는 방향으로 유입속도(Oncoming Velocity)  $\vec{U}_\infty$ 가 있다.

유동장내의 유체는 비압축(Incompressible), 비점성(Inviscid) 그리고 비회전성(Irrotational)을 가지는 이상유체(Ideal Fluid)로 가정하며, 따라서 라플라스 방정식(Laplace equation)을 만족하는 섭동속도 포텐셜(Perturbation Velocity Potential)이 존재한다고 할 수 있다.

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1}$$

경계치 문제를 푸는 것에 있어 경계면  $S$ 에서의 경계조건을 다음과 같이 나누어 설정 할 수 있다.

- 물체표면  $S_B$  에서 운동학적 경계조건(Kinematic boundary condition)을 만족해야한다

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{U}_\infty \cdot \vec{n} \tag{2}$$

- 후류면  $S_W$ 는 두께가 없다고 가정하며, 후류면에서 법선속도차이 ( $\Delta \frac{\partial\phi}{\partial n}$ )와 압력차이( $\Delta p$ )는 0이고, 포텐셜 차이( $\Delta\phi$ )는 허용 한다.

$$(\Delta p)_{on S_W} = P^+ - P^- = 0 \tag{3}$$

$$\left(\Delta \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{on S_w} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)^- = 0 \quad (4)$$

- 후류면을 가로지르는 포텐셜 차이는 물체 주변의 순환(Circulation)의 크기와 같으며 후류면을 따라 일정하다.

$$(\Delta \phi)_{on S_w} = \phi^+ - \phi^- = \Gamma \quad (5)$$

- 날개 뒷날에서의 속도는 유한하다는 Kutta Condition을 둔다.

$$|\nabla \phi|_{T.E} < \infty \quad (6)$$

- 물체의 외부면  $S_\infty$ 에서 물체에 의한 섭동 속도는 물체로부터 무한대의 거리에 있는 곳에서는 그 크기가 0에 한없이 가까워져 없어져야 할 것이다.

$$\nabla \phi \rightarrow 0, \text{ as } S_\infty \rightarrow \infty \quad (7)$$

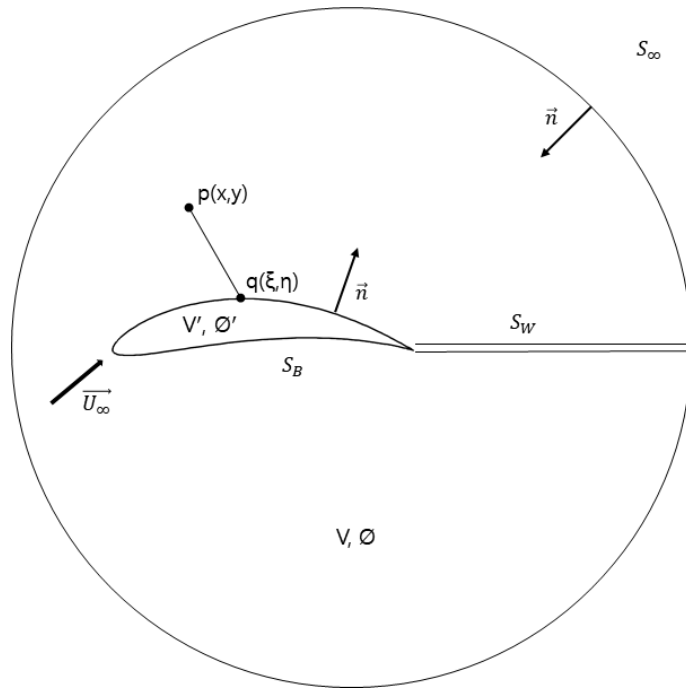


Fig. 1 Notation for a general geometry for the application of Green's Theorem

## 2.2 Fundamental Equation

우선 패널법에 쓰이는 형상을 정의하면 Fig. 2와 같다. 포일 형상을 N개의 선으로 된 패널로 나누면 N+1개의 노드가 생성된다. 노드와 패널의 순서는 날개끝단 아래 부분부터 시작하여 형상의 앞날을 돌아 다시 끝단의 윗면 순으로 정의된다.

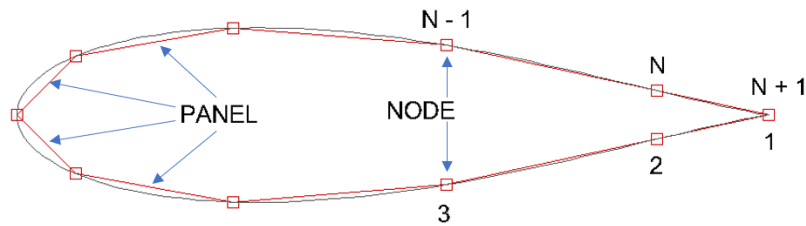


Fig. 2 Representation of a general airfoil with straight line segments(Panels)

그리고 각각의 국부패널 좌표(local coordinate system)는 Fig. 3과 같이 정의하였다.

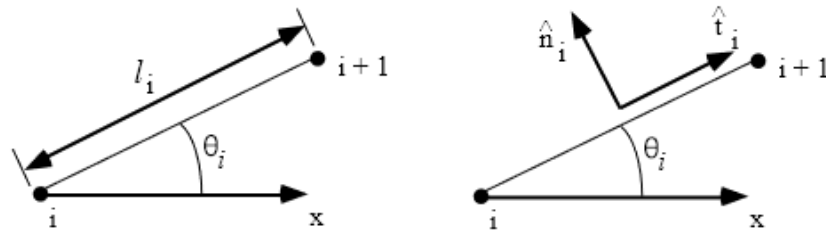


Fig. 3 Naming for local coordinate systems

$i^{th}$  번째 패널은  $i^{th}$  번째 노드와  $i+1^{th}$  번째 노드 사이에 놓인다. 그리고 패널의 x축 양의 방향에 대한 각도를  $\theta$ 로 둔다. 이러한 정의 하에  $\theta$ 에 대한 sin, cos값은 식(8)과 같다

$$\sin\theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i}, \quad \cos\theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i} \quad (8)$$

그리고 각 패널의 법선벡터(Normal Vector)와 접선벡터(Tangential



Vector)는 아래의 식(9)와 같이 정의하였다

$$\begin{aligned}\hat{n}_i &= -\sin\theta_i i + \cos\theta_i j \\ \hat{t}_i &= \cos\theta_i i + \sin\theta_i j\end{aligned}\tag{9}$$

지금까지 정의한 좌표계 아래, 유동장내 물체표면에 위치한 제어점(Control point) P에서 특이점(Singularity) Q에 의한 포텐셜(Potential)은 다음과 같이 2차원 단면의 Body Surface에 위치한 다이폴(Dipole), 쏘스(Source), 그리고 웨이크(Wake)에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned}-\pi\phi(p) &= \int_{S_B} [\phi(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q) - \frac{\partial\phi(q)}{\partial n_q}\log R(p;q)]ds \\ &+ \int_{S_W} \Delta\phi(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q)ds\end{aligned}\tag{10}$$

where,

- $\phi(p)$  = Perturbation Potential in V
- $p(x,y)$  = Field Point where induced potential is calculated
- $q(\xi,\eta)$  = Singularity Point
- $R(p;q)$  = Distance between point p and q  
=  $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$
- $\frac{\partial}{\partial n_q}$  = Normal derivative with respect to the point q
- $\phi(q)$  = Dipole Strength at q
- $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  = Source Strength at q

이때, Source Strength,  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  는 경계조건(Boundary Condition) 식(2),

$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{U}_\infty \cdot \vec{n}$  으로부터 알 수 있다. 따라서 식(10)은 물체표면에서 다이폴 세기,  $\phi(q)$ 를 미지수로 하는 적분문제로 볼 수 있다. 그리고 식(10)의 이산화는 미지수  $\phi(q)$ 에 대한 선형 적분방정식이 된다.

# 3. Piecewise Linear Panel Method

## 3.1 Introduction

지금까지 전통적으로 쓰여온 균인강도 패널법에서는 Fig. 5의 (a)처럼 적분 방정식의 이산화식을 만족하는 제어점(Control Point)은 패널의 중앙위치하며, 패널 내부 특이점 세기가 패널에 걸쳐 일정하게 분포한다고 가정하였다.

본 연구에 적용된 부분선형 패널법에서는 각 패널에 걸쳐 특이점의 강도가 선형적으로 변함을 의미하고, 이는 Fig. 5(b)처럼 인접한 두 패널에 걸쳐 선형적으로 변하는 특이점의 강도에 의한 영향으로 절점(Node)에서 특이점의 세기가 결정된다고 가정하였다.

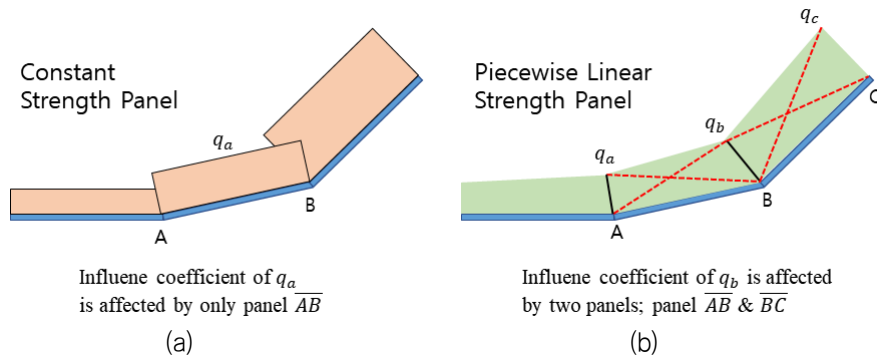


Fig. 4 Description of Constant and Linear Strength in adjacent panels

기존의 방법은 패널마다 특이점이 일정한 크기를 가지므로 인접한 패널과의 특이점세기의 차이가 필연적으로 발생한다. 하지만 부분 선형패널법에서는 특이점의 세기가 인접한 두 패널에 의해 결정되므로 노드에 걸쳐 특이점분포가 단차 없이 연결됨을 알 수 있다.

이러한 방법으로 인한 기대효과는 기존의 패널법이 가지는 특이점 세기 차이에 의한 오차가 유동해석에 끼치는 영향을 줄일 수 있다는 것이다.

### 3.2 Discretization of the Singularity Distribution

식(11) 는 이산화(Dicretization)에 의하여 다음과 같은 선형 대수방정식으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned}
 -\pi\phi(p) = & \int_{S_B} [\phi(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log R(p;q) - \frac{\partial \phi(q)}{\partial n_q} \log R(p;q)] ds \\
 & + \int_{S_w} \Delta\phi(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log R(p;q) ds
 \end{aligned} \tag{11}$$

이때, 특이점의 개수는 기존의 제어점과 특이점 모두 패널의 중앙에 위치하는 균일강도 패널법의 N개와 달리 부분선형 패널법에서는 특이점이 절점에 위치한 관계로 개수가 1개가 늘어난 (N+1)가됨을 주의한다. 이때 제어점의 개수는 패널의 중앙에 위치하여 기존 방법과 같이 N개로 동일하다.

$$\sum_{j=1}^{N+1} D_{ij} \phi_j + W_i (\Delta\phi)_{wake} = \sum_{j=1}^{N+1} S_{ij} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \tag{12}$$

where,

$$D_{ij} = \int_{c_j} \frac{\partial}{\partial n_q} \log R ds$$

$$S_{ij} = \int_{c_j} \log R ds$$

$$W_i = \int_{s_w} \frac{\partial}{\partial n_q} \log R ds$$

식 (12)와 같은 기존의 균일강도 패널법에 각 패널에 걸쳐 선형강도를 가지는 다이폴을 적용하게 되면 위의 선형 대수방정식은 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N B_{ij} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \tag{13}$$

where,

$$A_{ij} = DR_{ij-1} + DL_{ij} \quad \text{if } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (14.1)$$

$$j = 2, 3, 4, \dots, N$$

$$A_{ij} = DL_{ij} \quad \text{if } j = 1 \quad (14.2)$$

$$= DR_{ij} \quad \text{if } j = N+1$$

$$A_{ij} = A_{ij} - W_i \quad \text{if } j = 1 \quad (14.3)$$

$$= A_{ij} + W_i \quad \text{if } j = N+1$$

여기서 DL과 DR은 Fig. 4와 Fig. 5와 같은 선형강도를 가지는 다이폴 영향계수를 의미한다.

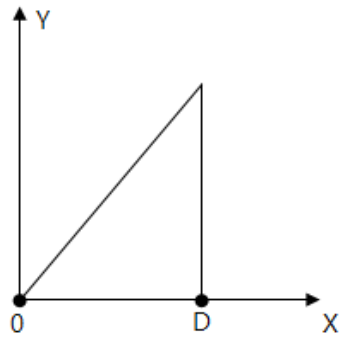


Fig. 5 DR dipole influence coefficient

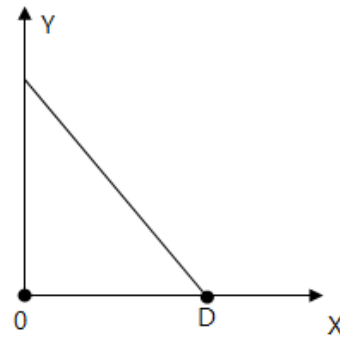


Fig. 6 DL dipole influence coefficient

식 (13)의 부분 선형강도 패널법에서는 제어점의 위치가 절점에 위치함으로써 각 절점에서의 Self-Induction을 고려하여야 한다. 본 논문에서는 Jack Moran(1983)이 제안한 방법을 사용하였다. Jack Moran은 각 절점에서의 Self-Induction은 절점에 인접한 두 패널의 사이의 각도로 표현할 수 있다고 보았다.

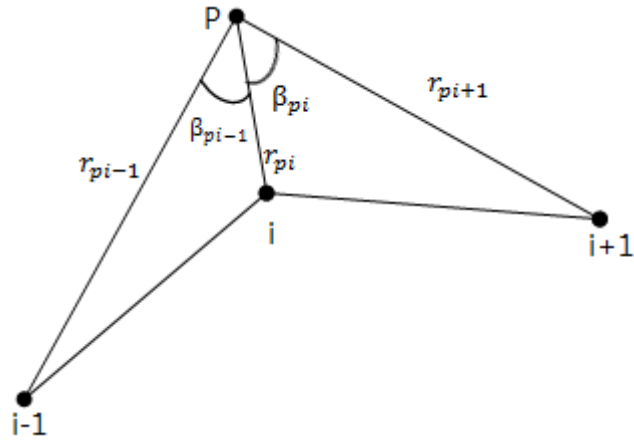


Fig. 7 Self-Induction for linear dipole strength

Fig. 7에서 제어점 P가  $i^{th}$  절점이 되면 Self-induction은 식 (15)과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta_{self} = \frac{1}{2\pi} \phi_i (\beta_{i-1} + \beta_i) \quad (15)$$

식 (15)과 같이 계산한 Self-Induction을 고려하여 식 (13)의  $A_{ij}$ 에 대입하면  $i = j (i, j = 2, 3, \dots, N)$  일 때  $A_{ij} = \theta_{self}$ 가 된다.

하나 더 고려할 것으로는 식 (14.1)에 빠져 있는  $A_{i,j} = A_{1,1}$  그리고  $A_{i,j} = A_{1,N+1}$  인 경우이다. 이 경우는 날개 끝단에서의 Self-Induction으로써 각 꼬리 날개 각도의 반이 되고, Fig. 7을 통해 확인할 수 있다.

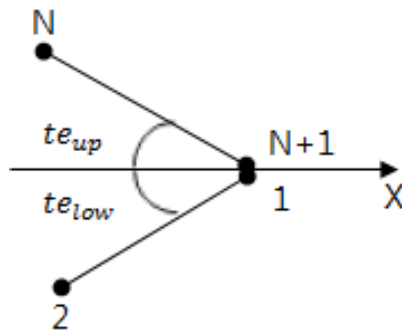


Fig. 8 Self-Induction at  $1_{st}$  and  $(N+1)_{th}$  Node

### 3.3 Kutta Condition

선형강도 패널법에서는 N개의 방정식과 N+1 개의 미지수가 있기 때문에 이산화 방정식을 풀기 위해서는 1개의 식이 추가적으로 요구된다. 그래서 Fig. 8과 같이 1번 패널 제어점에 유입되는 접선방향 속도(Tangential Velocity)와 N번 패널 제어점에 유입되는 접선방향 속도의 크기가 같도록 하는 Kutta Condition을 이용하여 방정식의 개수를 미지수의 개수와 같도록 하였다.

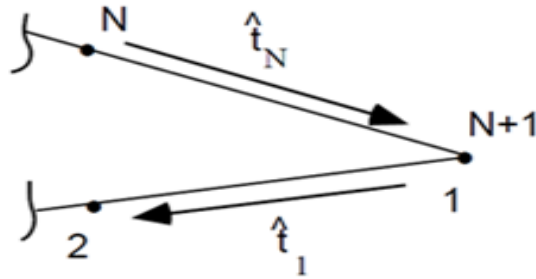


Fig. 9 Notation for Kutta Condition at the trailing edge

$$|\hat{U}_{t_N}| = |\hat{U}_{t_1}| \quad (16)$$

where,

$$\hat{U}_{t_N} = \frac{\phi_{N+1} - \phi_N}{l_N} + (\cos(\alpha)t_{x,N} + \sin(\alpha)t_{y,N})$$

$$\hat{U}_{t_1} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{l_1} + (\cos(\alpha)t_{x,1} + \sin(\alpha)t_{y,1})$$

$\phi(x)$  = Perturbation potential when  $x = 1, 2, N, N+1$

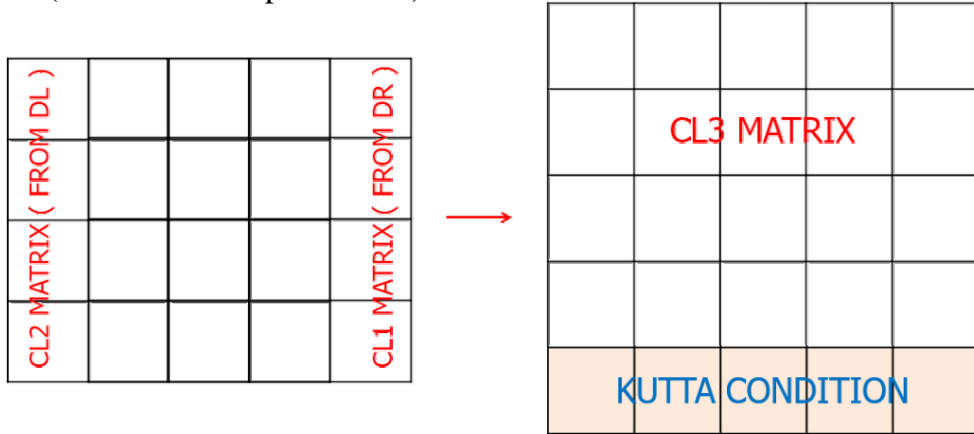
$l_y$  = Length of panel when  $y = 1, 2$

$\alpha$  = Angle of attack

$\hat{t}$  = Tangential vector toward  $1_{st}$  and  $N_{th}$  panel

### 3.3.1 Set up 'A-matrix'

( EX> no. of panel = 4)



$$CL3(I,J) = CL1+CL2 \quad \text{Linear dipole strength}$$

### 3.4 Definition of Coordinate in local and global

본 절에서는 각 패널에 해당하는 국부 좌표계 ( $\xi, \eta$ )와 전 좌표계 ( $x, y$ )에 대해 정의를 내리고자 한다.

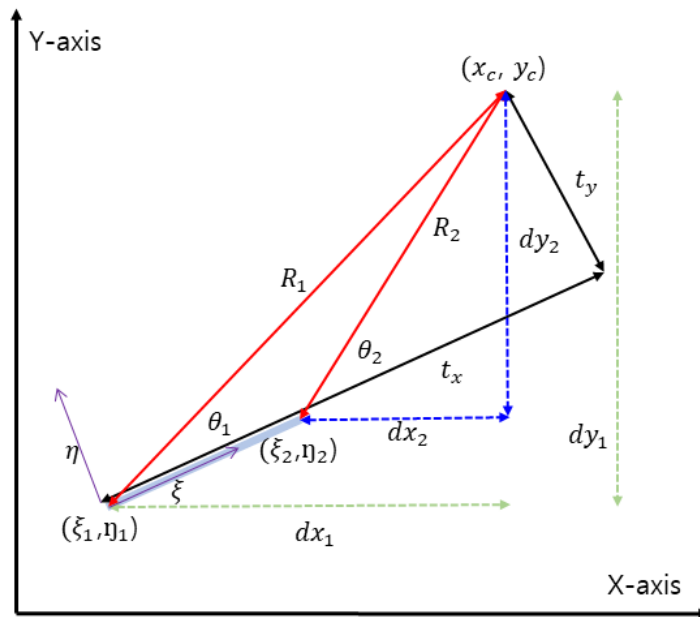


Fig. 10 The Local and Global Coordinate system about a panel

- $x_c, y_c$  : Field point where induced potential is calculated  
 $t_x, t_y$  : Distance from the field point to the first panel point  
in local coordinate  
 $R_1$  : Distance from the field point to the first panel point  
 $R_2$  : Distance from the field point to the second panel  
point  
 $dx_1, dy_1$  : Distance from the field point to the first panel point  
in global coordinate  
 $dx_2, dy_2$  : Distance from the field point to the second panel  
point in global coordinate  
 $dx, dy$  : Distance from the first panel point to the second  
panel point (  $dx = \xi_2 - \xi_1, dy = \eta_2 - \eta_1$  )  
 $L$  : Panel Length =  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}$

두 번째로 법선 및 접선 벡터를 정의하였다.

$$n_x : -\frac{dy}{L} = -\sin\theta \text{ ( X-direction Normal Vector )} \quad (17.1)$$

$$n_y : \frac{dx}{L} = \cos\theta \text{ ( Ydirection Normal Vector )} \quad (17.2)$$

$$t_x : \frac{dx}{L} = \cos\theta \text{ ( X-direction Tangential Vector )} \quad (17.3)$$

$$n_x : \frac{dy}{L} = \sin\theta \text{ ( Y-direction Tangential Vector )} \quad (17.4)$$

다음으로 국부좌표계에서 적절한 법선벡터를 사용하여 전 좌표계로 바꿔줄 수 있다.

$$t_x = dx_1 * \cos\theta + dy_1 * \sin\theta = dx_1 * n_y - dy_1 * n_x \quad (18.1)$$

$$t_y = dy_1 * \cos\theta + dx_1 * \sin\theta = dy_1 * n_y + dx_1 * n_x \quad (18.2)$$

$$U_{x,g} = U_{\xi,k} * n_y + V_{\eta,k} * n_x \quad (19.1)$$

$$V_{y,g} = -U_{\xi,k} * n_x + V_{\eta,k} * n_y \quad (19.2)$$



where,

$U_{x,g}$  : X-direction Velocity in Global Coordinate

$V_{y,g}$  : Y-direction Velocity in Global Coordinate

$U_{x,k}$  :  $\xi$ -direction Velocity in Local Coordinate

$V_{y,k}$  :  $\eta$ -direction Velocity in Local Coordinate

### 3.5 Influence Coefficient

본 절에서는 위 좌표계 정의를 바탕으로 특이점(Singularity)에 의한 제어점(Control Point)에서의 영향계수(Influence Coefficient)에 대해 논의 하고자 한다. 영향계수(Influence Coefficient) 계산을 위해 필요한 수식들을 정리하면 아래와 같다

$$dph = \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1}((t_x - L)/t_y) - \tan^{-1}(t_x/t_y) \quad (20)$$

$$R_1 : \sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \eta_1)^2} \quad (21)$$

$$R_2 : \sqrt{(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2} \quad (22)$$

먼저 특이점 소스(Source)에 의한 포텐셜은 균일강도 패널법에서 사용한 영향계수와 같고 그 수식은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \phi_{s,c} &= \int_{\xi=0}^{\xi=L} \log[(t_x - \xi)^2 + (t_y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (\text{when } \eta \rightarrow 0) \\ &= t_x^* \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + L^*(\log(R_2) - 1) - t_y^* dph \end{aligned} \quad (23)$$

다음으로 부분 선형강도가 적용된 특이점 다이폴(Dipole)에 의한 포텐셜은 패널에 걸쳐 패널의 시작점에서 끝점으로 갈수록 강도가 증가하는 것과 반대로 시작점에서 끝점으로 갈수록 강도가 감소하는 것, 두 가지로 구분하여 계산하도록 한다. 먼저 Fig 4.와 같이 시작점에서 끝점으로 갈수록 증가하는 영향 계수의 계산은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
\phi_{D.R} &= \int_{\xi=0}^{\xi=L} \frac{\xi}{L} \frac{\partial}{\partial \eta} (\log[(t_x - \xi)^2 + (t_y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}}) d\xi \\
&= \frac{1}{L} (x(\theta_2 - \theta_1) - y \ln(R_2/R_1)) \\
&\equiv \frac{1}{L} (x^* dph - y \ln(R_2/R_1))
\end{aligned} \tag{24}$$

다음으로 Fig 5.와 같이 강도가 감소하는 영향 계수의 계산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{D.L} &= \int_{\xi=0}^{\xi=L} (1 - \frac{\xi}{L}) \frac{\partial}{\partial \eta} (\log[(t_x - \xi)^2 + (t_y - \eta)^2]^{\frac{1}{2}}) d\xi \\
&= (1 - \frac{x}{L})(\theta_2 - \theta_1) - \frac{y \ln(\frac{R_2}{R_1})}{L} = (1 - \frac{x}{L})dph - \frac{y \ln(\frac{R_2}{R_1})}{L}
\end{aligned} \tag{25}$$

### 3.6 Position of Control Point

균일강도 패널법에서는 제어점의 위치가 패널의 중앙에 위치하고 있다. 그러나 부분 선형강도 패널법에도 동일하게 제어점의 위치를 패널의 중앙에 두고 행렬  $A_{ij}$ 를 구성하게 되면 선형방정식 ' $AX=B$ '에서 해 (Solution Vector)  $x$ 를 구할 때 발생하는 오차의 한계를 표현하는 행렬조건수(Matrix Condition Number)가 커져 수치해석에 따른 오류가 누적되어 정확한 해를 얻을 수 없게 된다. 즉 행렬조건수가 클수록 큰 오차가 발생할 가능성이 높은 것이다.

Table 1. Matrix condition number of  $A_{ij}$

No. of panel	Center	Node
8	3.4831e+017	23.6041
16	4.0360e+017	74.2239

20	5.5921e+017	109.2699
40	8.0244e+006	381.8431
80	2.2895e+006	1.4135e+003

Table. 1은 제어점을 패널의 중앙과 절점에 위치시킨 채 패널의 수를 증가시켜가며 계산한  $A_{ij}$ 에 대한 행렬조건수를 나타낸 표이다. 제어점이 패널의 중앙에 있는 경우 행렬  $A_{ij}$ 의 크기는  $N \times N$  matrix이고 제어점이 절점에 있는 경우 행렬  $A_{ij}$ 의 크기는  $N+1 \times N+1$  matrix이다. 제어점이 패널의 중앙에 있는 경우 행렬조건수가  $10^6$ 이상으로 매우 크고 특이점(Singularity)이 존재하는 행렬이 되고, 제어점을 절점으로 옮겨 행렬  $A_{ij}$ 를 구성하고 계산하였더니 행렬조건수가 감소하는 것을 통해 행렬  $A_{ij}$ 가 불량조건(ill condition)이 아님을 확인할 수 있다.

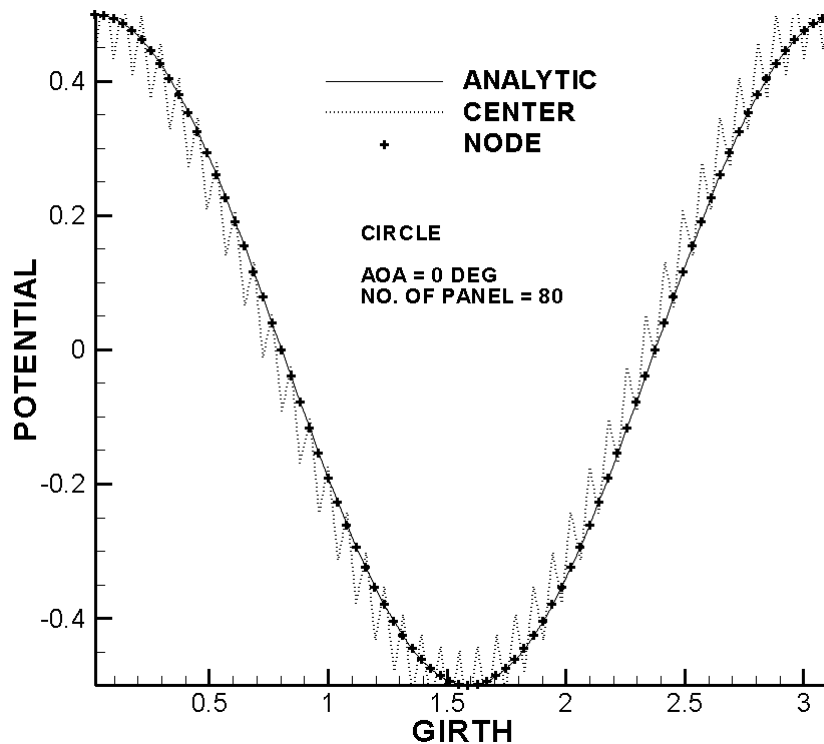


Fig 11. Potential comparison of circle using two kinds of control point(center vs node)

## 4. Uniform Rational B-Spline

### 4.1 Introduction

본 논문은 패널법의 결과를 기저로 B-스플라인이 적용되었으므로 B-스플라인의 성질과 특성에 대해 설명하고자 한다. 기본적으로 B-스플라인은 기저함수(Basis Function)와 제어꼭지점(Control Point)의 곱의 합으로 나타낼 수 있고 그 표현은 다음과 같다

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (26)$$

where,

$p$  : B-Spline Curve order

$u$  : Knots( $0 \leq u \leq 1$ )

$\vec{U}$  : Knot Vector

$N_{i,p}(u)$  : Basis Function

$P_i$  : Control Point

### 4.2 Definition of B-Spline Basis Function

#### 4.2.1 Basis Function

본 절에서는 기저함수의 정의와 특성에 대해 이야기하고자 한다. B-스플라인 기저함수를 정의하는 방법은 다양하게 있지만 컴퓨터 언어를 이용하여 계산을 수행하기 위해 프로그래밍에 적합한 Cox-DeBoor 순환식을 사용하고 이 때 매듭 백터(Knot Vector)는  $u_0$ 에서  $u_m$ 까지 가는 동안 감소하지 않는 실수(Real Number)의 순서로 정할 수 있다.

$$\begin{aligned} U &= \{u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{n-1}, u_m\} \quad u_i \leq u_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, (m-1), m) \\ N_{i,0}(u) &= 1 \quad \text{if } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ &0 \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (27)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (28)$$

기저함수를 구성하기 위해서는 함수의 차수(order), 매듭(knots), 매듭 벡터(Knot Vector)가 필요함을 알 수 있다. 기저함수의 특성으로는, B-스플라인 기저함수를 이용하여 곡선을 표현할 때 곡선의 한 점을 나타내기 위해 모든 기저함수가 사용되는 것은 아니고 차수만큼의 기저함수가 필요하다. 따라서 그 외의 기저함수는 모두 0이 되고, 기저함수는 곡선의 한 점을 나타내기 위한 제어점들의 영향으로 설명할 수 있기에 어떤 위치에서든 기저함수의 합은 1인 된다.

$$\sum_{i=0}^{N^u-1} N_{i,p}(u) = 1 \quad (29)$$

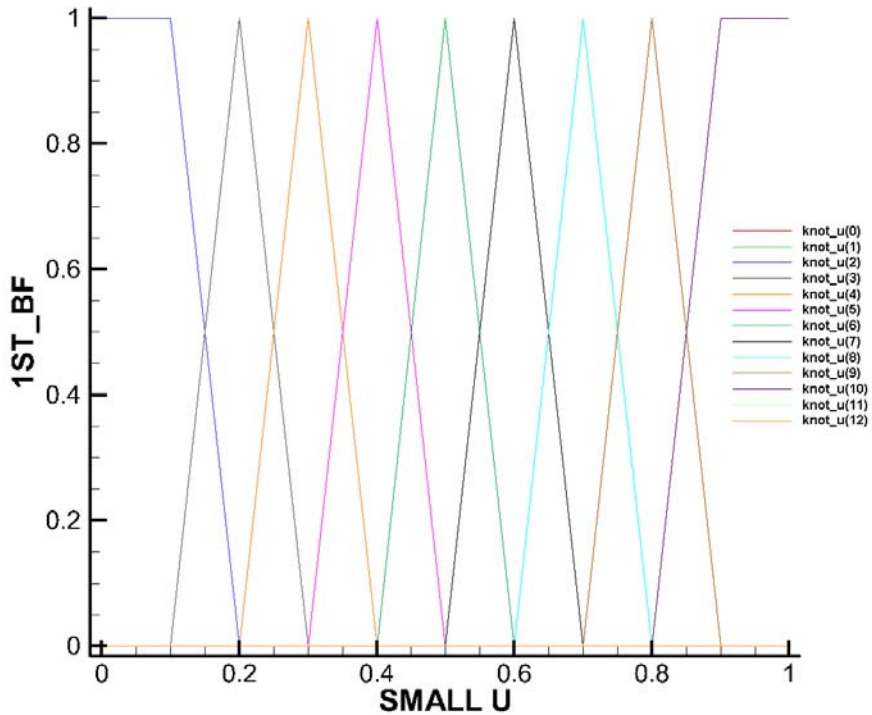


Fig. 12 The 1<sub>st</sub> Order Basis Function with 12 knots

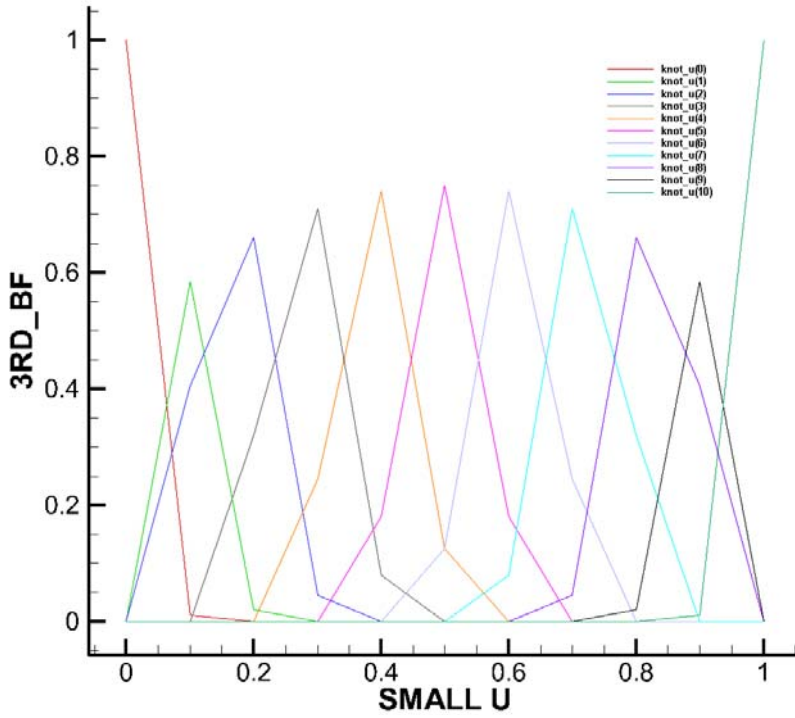


Fig. 13 The  $3_{rd}$  Order Basis Function with 12 knots

#### 4.2.2 Knot Vector

B-스플라인의 기저함수는 Cox-DeBoor순환식에 따라 매듭벡터에 의해 변화된다고 할 수 있다. 매듭 벡터의 각 값들의 차를 노트스팬(Knot span)이라 한다. 앞쪽에서는  $u_0$ 를 기점으로 (p+1)개 만큼의 같은 값이 반복되고, 뒤쪽에서는  $u_{m-p}$ 을 기점으로  $u_m$ 까지 (p+1)개 만큼의 같은 값이 반복되는데, 이것은 B-스플라인의 특성에서 첫 번째 제어점과 마지막 제어점이 곡선의 첫 번째와 마지막 점이 되기 때문이다. 끝으로 매듭 벡터의 개수는 (m+1)개로써 그 각각의 의미는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 m &= \text{no. of control point} + p(\text{order}) = N^v + p \\
 \vec{U} &= \{u_0 \dots u_{p+1}, \dots, u_i \dots u_{m-p-1} \dots u_m\} \quad (i = 0, \dots, m) \\
 u_i &= \begin{cases} 0 & 0 \leq i \leq p \\ k_i & p+1 \leq i \leq m-p-2 \\ 1 & m-p-1 \leq i \leq m \end{cases}
 \end{aligned} \tag{30}$$

여기서  $N^n$ 는 제어꼭지점의 개수,  $p$ 는 B-스플라인 곡선의 차수이다. 노트스팬이 같을 경우 등간격 노트벡터(Uniform knot vector)라 하고 등 간격이 아닐 경우, 비등간격 노트벡터(Non-uniform knot vector)라 한다. 등간격 노트벡터로부터 구해진 곡선은 Uniform B-Spline이라 하고 비등간격 노트벡터로 구해진 곡선을 Non-Uniform B-spline 이라고 이것이 우리가 잘 알고 있는 NUBS이다. Fig. Fig에 사용된 노트벡터는 예시로 적어보면 등 간격 노트벡터로써 다음과 같다.

$$\vec{U} = \{ 0, 0, \frac{0}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}, 1, 1 \}$$

Cox-DeBoor순환식을 컴퓨터 언어로 표현할 때 한 가지 주의할 것은 컴퓨터 언어의 차수는 0차를 인식할 수 없는 관계로 변수 설정시 최초 기저함수의 수식의 차수가 1로 표현되는 것이다. 본 논문의 사용된 컴퓨터 언어는 포트란인 관계로 이 부분을 정리하면 아래와 같다.

Table. 2

	Order, p			
Real formula	0	1	2	3
Fortran formula	1	2	3	4

### 4.2.3 Knots

매듭(Knots)이란 최종적으로 B-Spline Curve를 2차원 평면에 그렸을 때 계산되어져 표시되는 점의 개수를 결정짓는 변수로써 최초 기저함수를 구성함에 있어 중요한 역할을 한다. 매듭벡터와 마찬가지로 매듭 또한 0과 1사이에서 감소하지 않는 실수의 순서로 자유롭게 정의할 수 있다.

#### 4.2.4 Verification

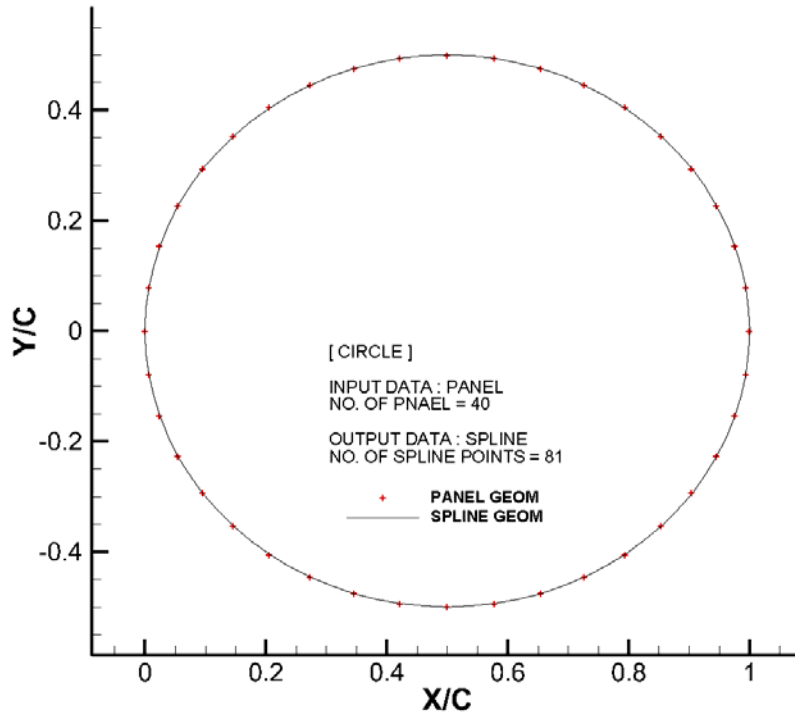


Fig. 14 Circle Geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve

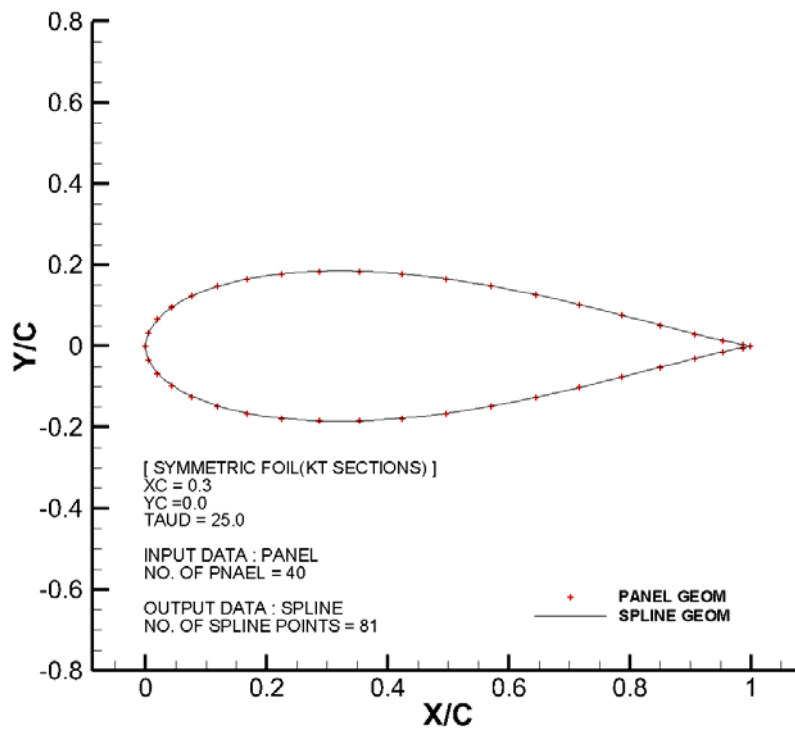


Fig. 15 Symmetric Foil Geometry using  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve



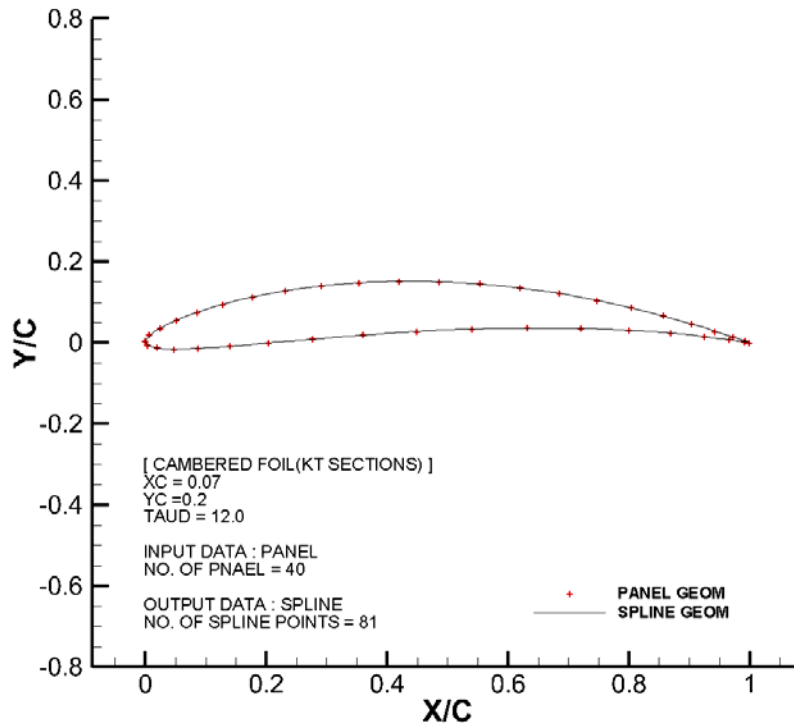


Fig. 16 Cambered Foil Geometry using 2<sub>nd</sub> Order B-Spline Curve

### 4.3 The Derivative of a B-spline Curve

#### 4.3.1 Introduction

본 절에서는 B-스플라인 미분의 정의 및 특성에 대해 논의하고자 한다. 일반적으로 미분이란 기하학적 의미를 가지는 값으로써 원함수 좌표 지점에서의 접선의 기울기를 의미한다. 다만 컴퓨터 언어를 이용하여 미분을 수행할 때 해석적으로 수행하는 어려움이 있어 일반적으로 수치미분을 수행해왔으나 B-스플라인 미분의 장점으로 해석적으로 미분을 수행할 수 있다는 점이다. 먼저, B-스플라인 곡선에 대한 계산이 선행되고 매듭(knots)이 그대로 고정된다면 B-스플라인 곡선에 대한 미분을 수행할 수 있고, B-스플라인과 마찬가지로 미분된 기저함수와 제어점의 곱으로 표현할 수 있다.

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{N^v-1} N_{i,p}^{(k)}(u) P_i \quad (31)$$

### 4.3.2 The k-th derivatives of the Basis Function

미분된 기저함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$N'_{i,p} = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (32)$$

그리고 이 식을 식 (31)에 적용하면 우리는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} C'(u) &= \sum_{i=0}^n N'_{i,p}(u) P_i \\ &= \sum_{i=0}^n \left( \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \right) P_i \\ &= \left( p \sum_{n=-1}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_{i+1}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) - \left( p \sum_{n=0}^n N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_{i+1}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \\ &= p \frac{N_{0,p-1}(u) P_0}{u_p - u_0} + p \sum_{n=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_{i+1}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} - p \frac{N_{n+1,p-1}(u) P_n}{u_{n+p+1} - u_{n+1}} \end{aligned} \quad (33)$$

첫 번째와 마지막항은 0/0 형태로써 0으로 정의하면 최종적으로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} C'(u) &= \sum_{i=0}^n N'_{i,p}(u) P_i \\ &= p \sum_{n=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \\ &= p \sum_{n=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) Q_i \end{aligned} \quad (34)$$

where

$$Q_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}$$

이러한 과정을 거친다면 원하는 차수의 미분을 얼마든지 어떤 곡선에 대해서든 구할 수 있다.

### 4.3.3 Verification

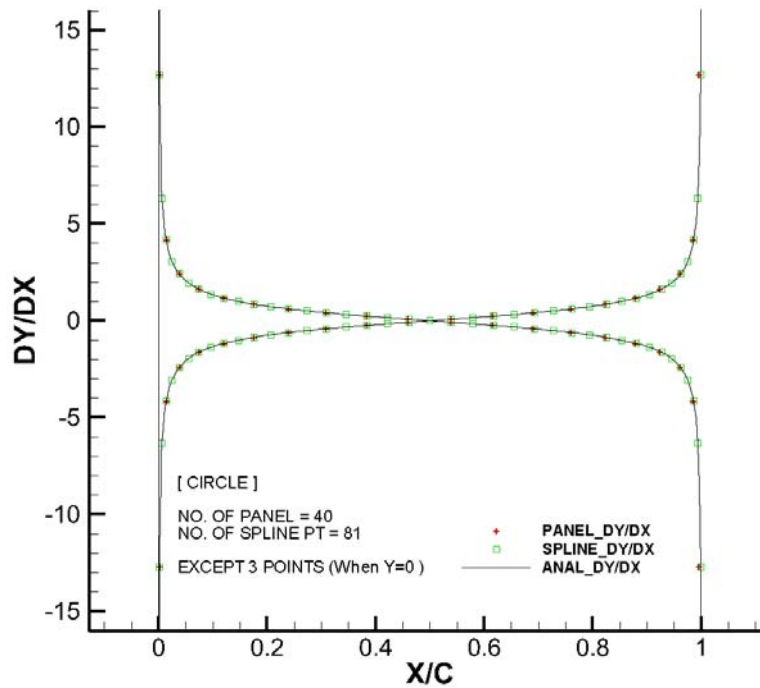


Fig. 17 Slope of a circle( $=\frac{dy}{dx}$ ) at nodal point using simple difference and the derivative of a  $2_{nd}$  B-Spline Curve

Table. 3

	ANLAYTIC	PANEL	SPLINE
FIRST	INFINITY	12.7062047361747510	-273510
LEADING EDGE	INFINITY	-12.7062047361747510	496878096
		12.7062047361747510	
END	INFINITY	-12.7062047361747688	-294992

where,

$$\text{Analytic} = \frac{0.5 - x(i)}{y(i)} \quad (35.1)$$

when circle formula is  $(x - 0.5)^2 + y^2 = (0.5)^2$

$$\text{Panel} = \frac{y(i+1) - y(i)}{x(i+1) - x(i)} \quad (35.2)$$

$$\text{Spline} = \frac{dy/du}{dx/dv} \frac{du}{dv} = \frac{dy}{dx} \quad (35.3)$$

## 5. Error Analysis

### 5.1 Introduction

본 절에서는 패널법을 기반으로 B-스플라인을 적용한 결과의 정확도에 대한 검증을 위해서 해석해가 존재하는 문제(Karman-Trefftz Section)를 풀고 해석해와 패널법만을 이용한 결과, 패널법을 기반으로 B-스플라인을 적용한 결과 3가지를 이용하여 오차 분석을 수행하도록 하겠다.

오차 분석을 수행하는 통계학적 방법은 여러 가지가 있으나 본 연구는 동일한 단면에 대해 동일한 조건을 가지고 반복적인 계산을 수행하였을 때 그 결과들이 해석해를 중심으로 계산을 수행할 때마다 다르게 나오는 경우가 아니기에 가장 기본적이고 누구나 쉽게 이해할 수 있는 표준편차(Standard Deviation)을 적용하도록 하겠다. 표준편차가 가지는 의미는 표준편차가 작을수록 컴퓨터를 이용한 수치계산이 해석해에 가깝고, 다시말해 즉 정도가 높다고 이야기할 수 있을 것이다.

### 5.2 Deviation

통계학에서 의미하는 편차(Deviation)은 자료값의 평균과 변량의 차이를 의미한다. 그러나 본 연구에서 편차는 해석해와 수치계산 결과의 차이로 정의하도록 하겠다.

$$\Delta X = X_{anal} - X_{numerical} \quad (36)$$

다만 편차의 합은 항상 0 이기에 해석해를 중심으로 한 수치계산 결과의 분포에 대한 정보는 얻을 수 없다.

### 5.3 Calculation Position

단면의 x좌표 혹은 패널 길이를 이용한 변수인 Girth Length를 x축 변수로, 수치 계산 결과와 해석해를 y축 변수로 표현할 때에 편차를 계산하기 위해서는 동일한 x좌표에서 계산된 y좌표가 필요하다.

패널법과 Karman-Treffetz Section에 대한 해석해의 경우 섭동속도 (Perturbation Velocity) 및 압력계수(Pressure Coefficient)가 패널의 중앙(Center)에서 계산되어지기에 보간법이 따로 필요하지 않다. 그러나 B-스플라인이 적용된 수치계산의 경우 섭동속도 및 압력계수가 패널의 절점(Node)에서 계산되어지기에 보간법이 필요하다 그래서 본 절에서는 동일한 x좌표에서 정확한 편차를 계산하기 위한 보간법 (Interpolation)을 논의하도록 하겠다.

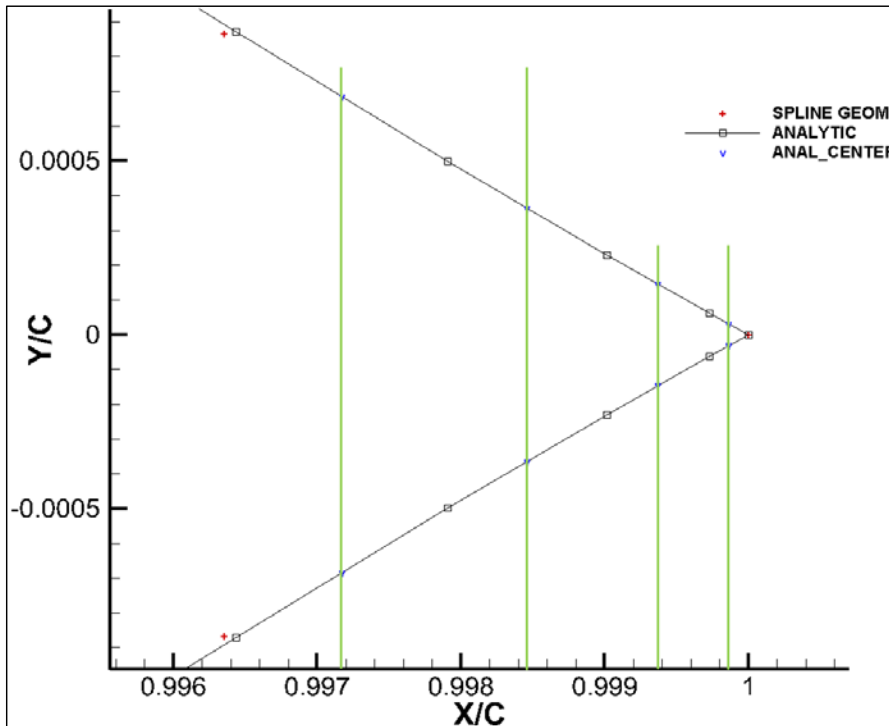


Fig. 18 a Karman-Treffetz section at the trailing edge  
( $\tau_{uD} = 25^\circ$ ,  $x_c = 0.3$   $y_c = 0.0$ )

where,

+ = Applied B-Spline Geometry Coordinate ( $x_{spline}, y_{spline}$ )

□ = Calculated Analytic Geometry Coordinate ( $x_{anal}, y_{anal}$ )

∨ = The Position of center in the panel

$y_{sp,k} = x_{sp,k}$  위치에서 계산된 섭동속도 또는 압력계수,  $k=1,2 \dots N+1$

$girth_{sp,k} = x_{sp,k}$  위치에서 계산된 girth length

$girth_{anal,k} = k_{th}$  패널의 중앙에서 계산된 girth length

$$m = \frac{y_{sp,2} - y_{sp,1}}{girth_{sp,2} - girth_{sp,1}}, \text{ Gradient} \quad (37)$$

$$y_{ip} = m(girth_{anal,k} - x_{sp,1}) + y_{sp,1} = X_{numerical} \quad (38)$$

‘∨’ 표식이 있는 지점은  $(\frac{\partial \phi}{\partial l})_{Anal}$  이 존재하는 지점으로써 또한 해석 해와 보간법을 활용한 수치계산의 편차가 계산될 지점이기도 하다.

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_{anal} - X_{numerical} \\ &= X_{anal} - y_{ip} \\ &= X_{anal} - [m(girth_{anal,k} - x_{sp,1}) + y_{sp,1}] \end{aligned} \quad (39)$$

Eq()에 계산된 편차를 바탕으로 편차제곱 평균의 제곱근으로 계산되어 지는 표준편차(Standard Deviation)을 활용하여 수치계산 결과가 해석 해로부터 얼마나 떨어져 있는가, 즉 정확도를 비교하도록 하겠다. 표준 편차를 구하는데 이용된 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta X)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{anal} - X_{Numerical})^2} \end{aligned} \quad (40)$$

## 6. Force

2차원 날개 단면에서의 섭동속도는 포텐셜을 패널의 접선 방향으로 미분하여 얻을 수 있다. 전체 속도는 유입속도(Oncoming Flow Velocity)와 섭동속도(Perturbation Velocity)의 합으로 나타낼 수 있고 이렇게 구한 속도를 Bernoulli's 방정식을 대입하여 압력계수를 계산할 수 있다.

양력은 압력계수의 y축 성분을 날개단면 길이 방향에 대해 적분을 하여 얻을 수 있고, 항력은 압력계수의 x축 성분을 길이 방향에 대해 적분을 하여 얻을 수 있다.

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (41)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c} = \int_{S_B} P n_y ds = \sum_{i=1}^N (C_P)_i (n_y)_i L_i \quad (42)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c} = \int_{S_B} P n_x ds = \sum_{i=1}^N (C_P)_i (n_x)_i L_i \quad (43)$$

where,

$L_i$  = Length of I-th panel

# 7. Results and Discussion

## 7.1 Results

### 7.1.1 Geometry

계산에 사용되어진 단면은 수치계산 결과의 비교를 용이하게 하기 위해서 해석해가 존재하는 Karman-Trefftz Section을 활용하였고, 단면 생성 시 조건을 달리하여 총 3가지의 단면을 사용하였다.

Table.

	tauD	xc	yc
circle	180.0	0.0	0.0
symmetric foil	25.0	0.3	0.0
cambered foil	12.0	0.07	0.2

B-스플라인을 적용하기 위해서 먼저 40개의 패널을 생성한 후, 생성된 41개의 절점을 가지고 ' $P = N^{-1} \times Q$ ' 역행렬을 풀어 41개의 제어점을 구하고 구해진 제어점을 바탕으로 knots을 개수를 81개로 늘려 B-스플라인 곡선을 표현하였다.

where,

$N$  = knots vector와 knot로 구성된 Basis Function,

$(N+1) \times (N+1)$  크기를 가지는 Square Matrix

$N^{-1}$  =  $N$ 의 역행렬

$Q$  = B-스플라인 곡선에서 항상 지나야 하는 점

1) 단면의 경우 (x,y)의 절점 좌표

2) 포텐셜의 경우 포텐셜 값

단면 계산의 경우 B-스플라인이 적용된 결과가 패널법만을 이용한 기존의 결과를 지나면서 절점 밖에 계산할 수 없었던 단점을 극복하고 패널내의 임의의 점에서도 계산을 수행되었고 그 결과 또한 해석해를 구하는데 사용되어진 단면에 수렴하고 일치하는 것을 확인 할 수 있었다.



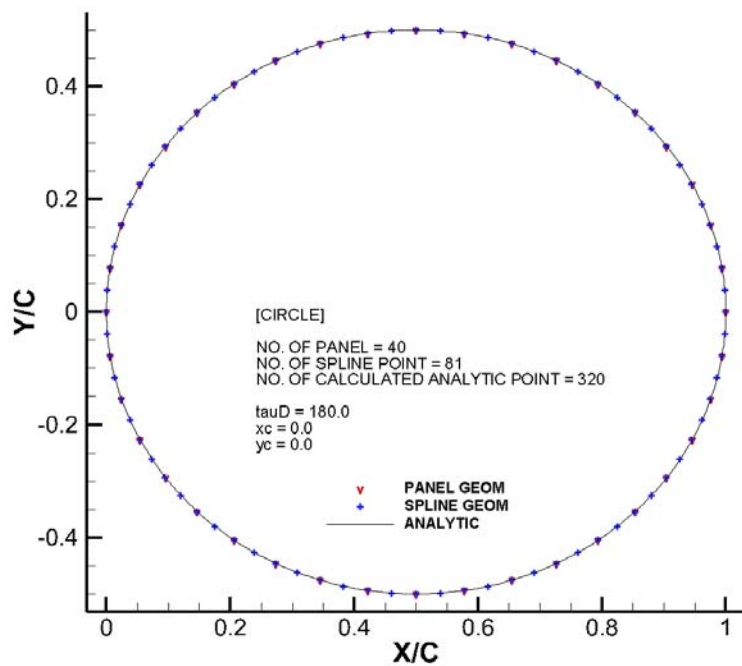


Fig. 19 The verification of the geometry using the 2<sup>nd</sup> Order B-Spline Curve (Circle)

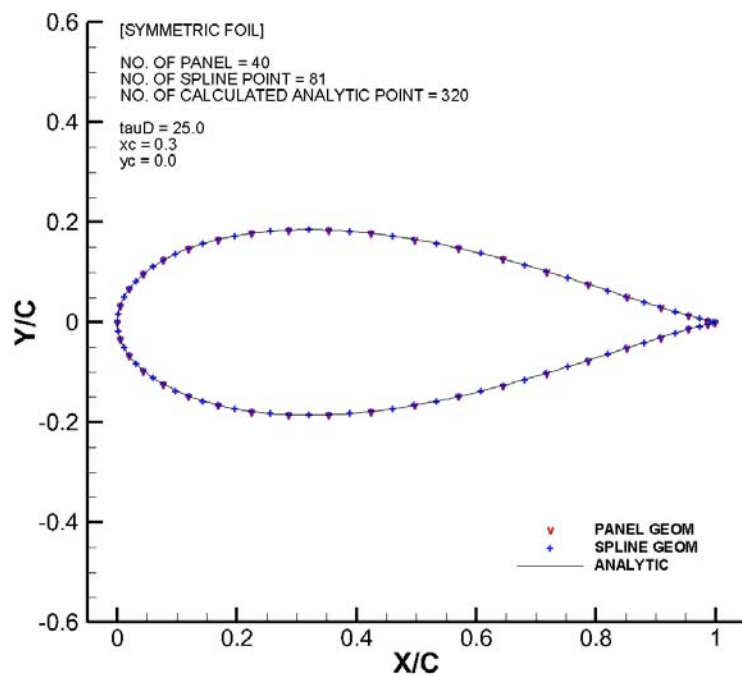


Fig. The verification of the geometry using the 2<sup>nd</sup> Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

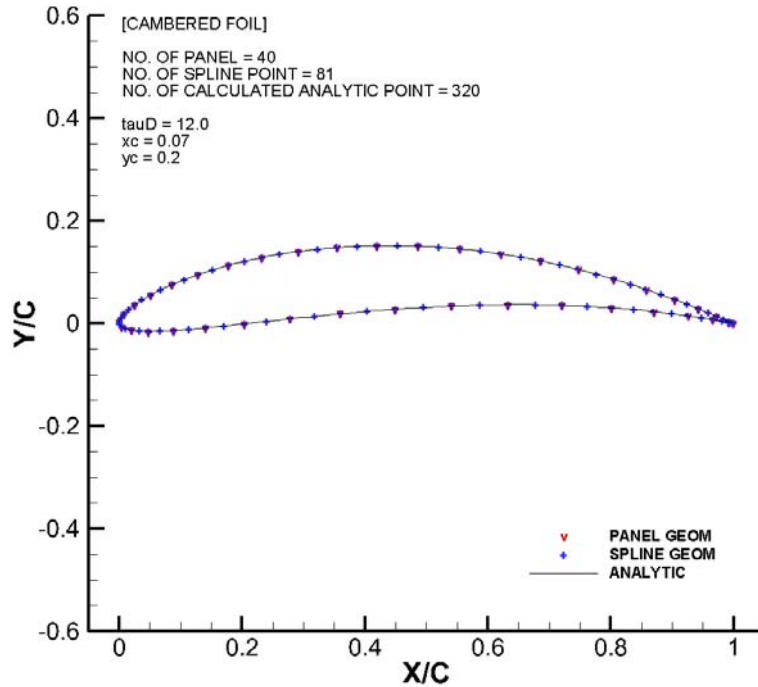


Fig. 21 The verification of the geometry using the 2<sup>nd</sup> Order B-Spline Curve (Cambered Foil)

### 7.1.2 Potential

다음으로 생성된 각 단면에 대해 받음각(Angle of attack)이 0도일 때와 90도일 때 2가지 경우에 대해서 포텐셜 값을 계산하였다.

그 결과 앞선 결과와 마찬가지로 B-스플라인을 적용한 결과가 패널법만을 이용한 결과를 지나면서 절점 외의 점에서도 계산이 수행되었고, 그 결과 역시 해석해에 수렴하는 것을 확인 할 수 있었다.

다만 복소수를 활용하여 구한 2차원 단면의 포텐셜의 경우 패널법이나 B-스플라인이 적용된 결과와 평행이동 된 것을 감안하여 서로 같은 위치에 그래프를 그리고자 노력하였으나 대칭성을 띄는 단면에 대한 받음각이 0도일 때 결과는 정확하게 일치시키지 못하였음을 볼 수 있다. 그러나 그 결과가 미분을 통한 섭동속도를 구함에 있어 큰 영향을 주지 못하는 것을 알기에 다음 계산을 수행함에 있어 문제가 되지 않는다고 할 수 있다. 모든 계산의 결과는 아래 그림으로 첨부하였다.

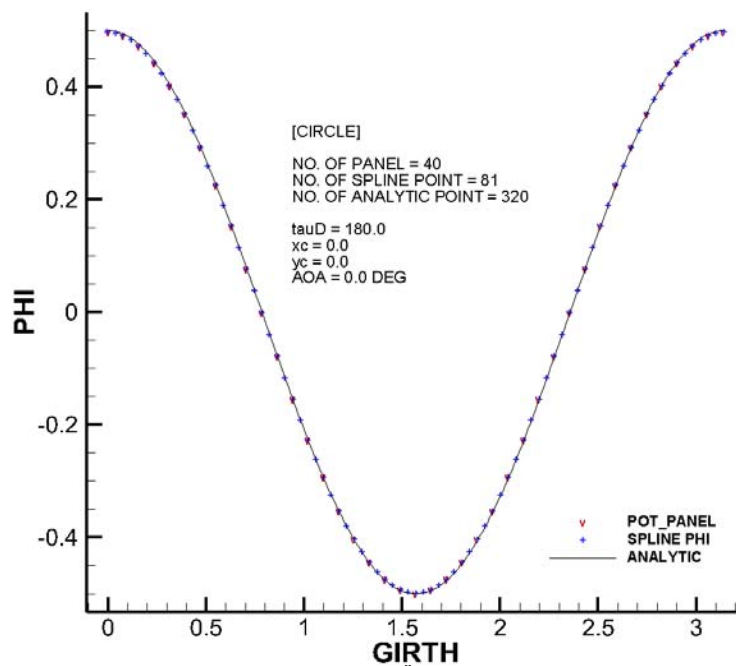


Fig. 22 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)

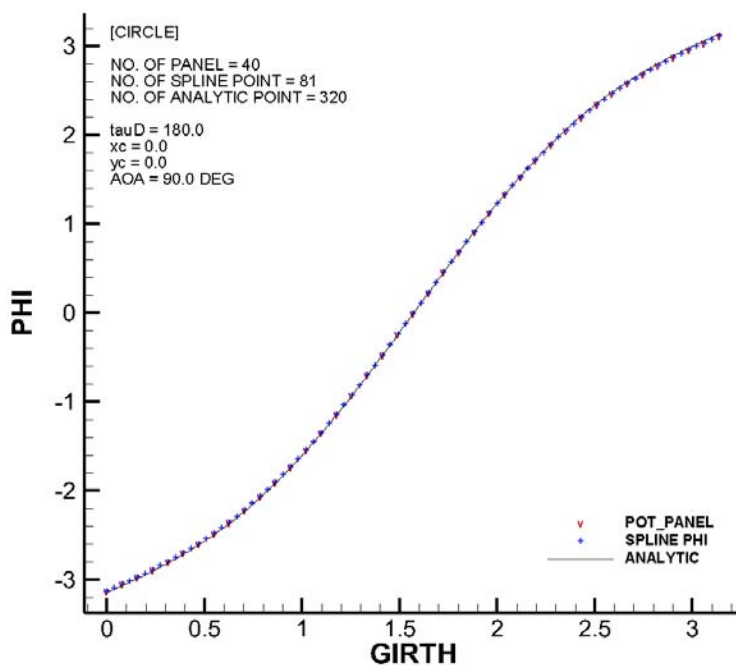


Fig. 23 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)

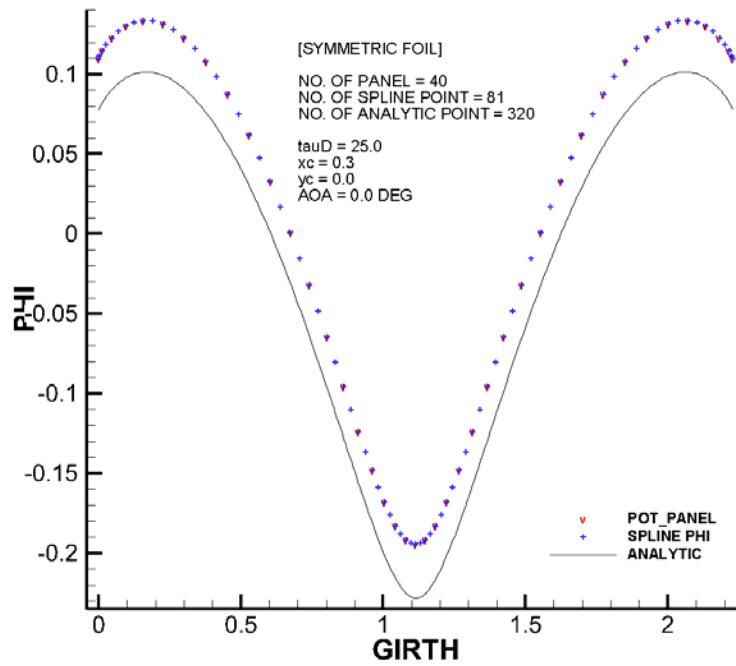


Fig. 24 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

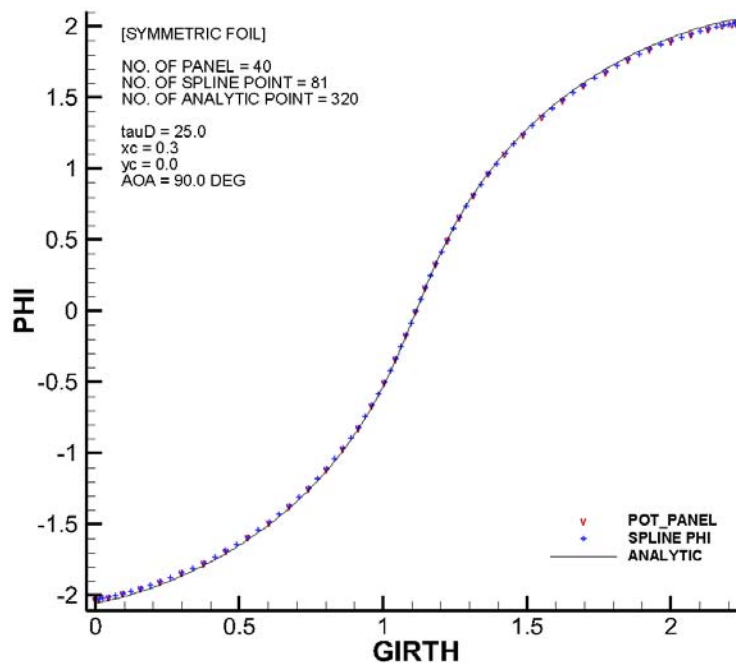


Fig. 25 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

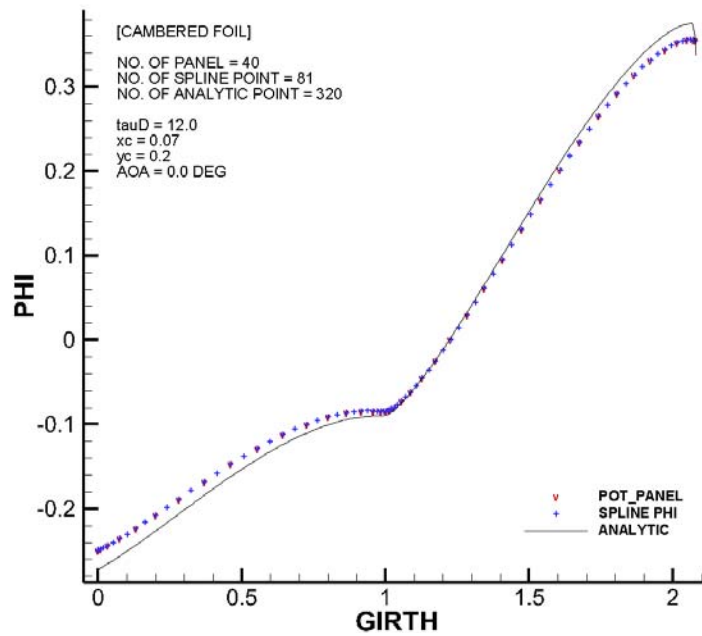


Fig. 26 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)

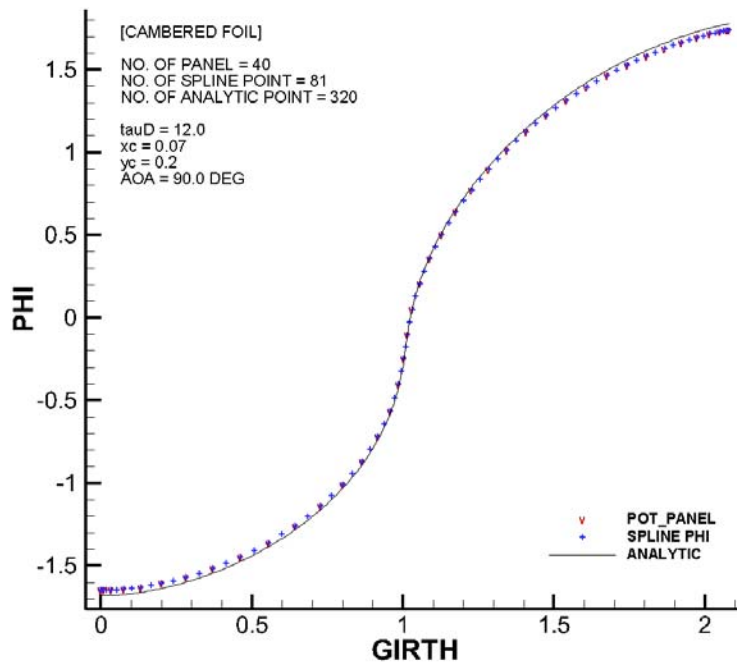


Fig. 27 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Potential using the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)

### 7.1.3 Perturbation Velocity

본 절은 7.1.2절에서 확인한 포텐셜 값을 바탕으로 B-스플라인 미분을 적용하였고 본 연구에서 기존의 단순 차분을 통한 수치 미분의 단점을 극복하고자 하는 목표를 이루었는지를 확인할 수 있는 중요한 부분이다. B-스플라인 미분을 적용하여 해석적으로 미분을 수행한 결과, 곡률이 심하게 표현된 부분 뿐만 아니라 전체적으로 단순차분을 통한 수치 미분을 수행한 결과보다 해석해를 더 잘 쫓아가는 것을 확인할 수 있다. 다시 말해 단순차분을 통한 수치 미분의 정확도보다 해석적 미분을 통한 B-스플라인 미분의 정확도가 높다고 이야기할 수 있는 것이다. 한 가지 아쉬운 점은 캠버가 있는 곡률이 심한 단면의 경우 B-스플라인을 활용한 해석적 미분을 수행하더라도 다른 단면에 비해 해석해에 거의 근접하여 쫓아가지 못함을 확인할 수 있었다. 모든 계산 결과는 아래 그림으로 첨부하였다.

$$V = \text{Panel\_DELPHI}/\text{EL} = \frac{\phi(i+1) - \phi(i)}{el(i)} \quad (44)$$

$$+ = \text{Re\_S\_PER} = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u} / \frac{\partial l}{\partial v} \right] \times \frac{\partial u}{\partial v} \quad (45)$$

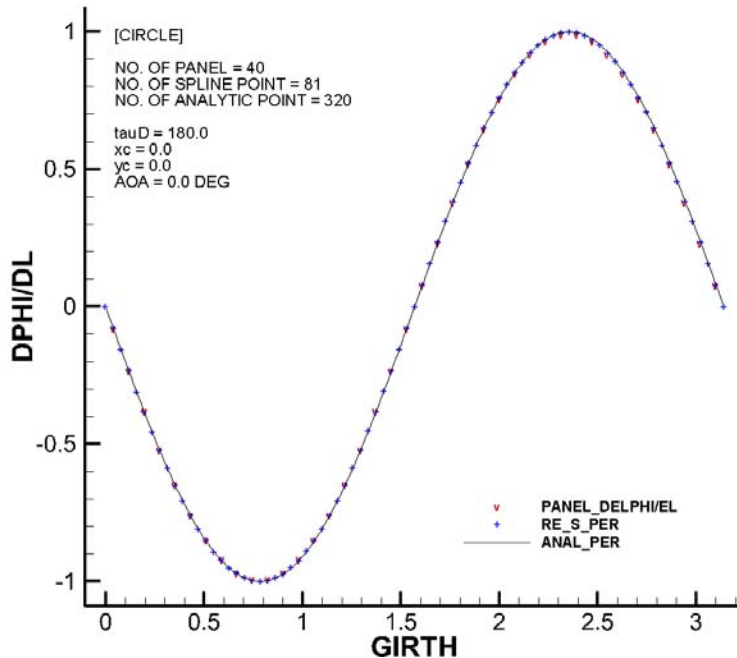


Fig. 28 When Angle of attack = 0°, The verification of Perturbation Velocity using the 1<sub>st</sub> Derivatives of the 2<sub>nd</sub> Order B-Spline Curve (Circle)

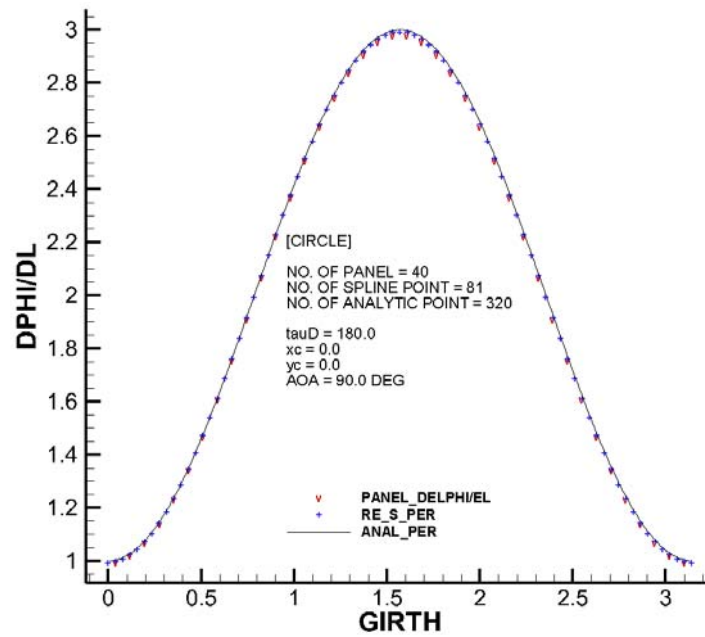


Fig. 29 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)

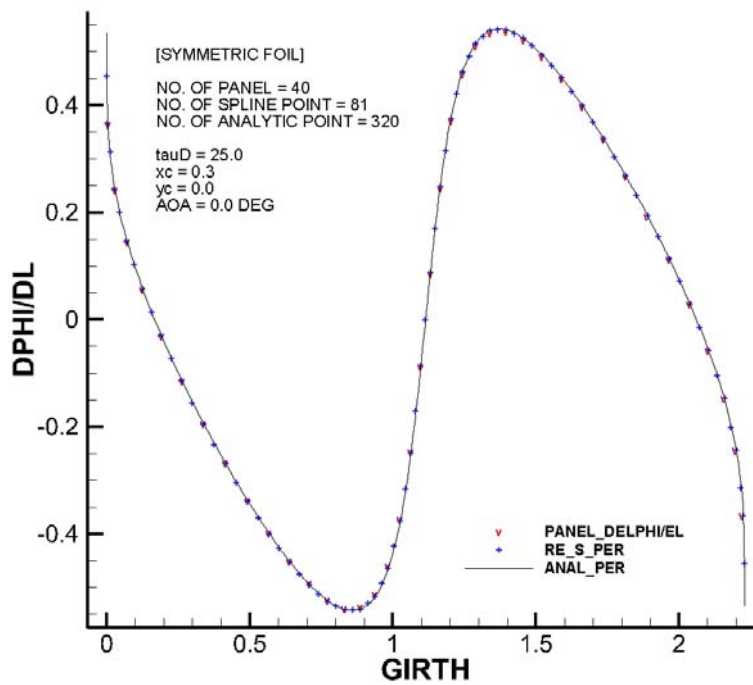


Fig. 30 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

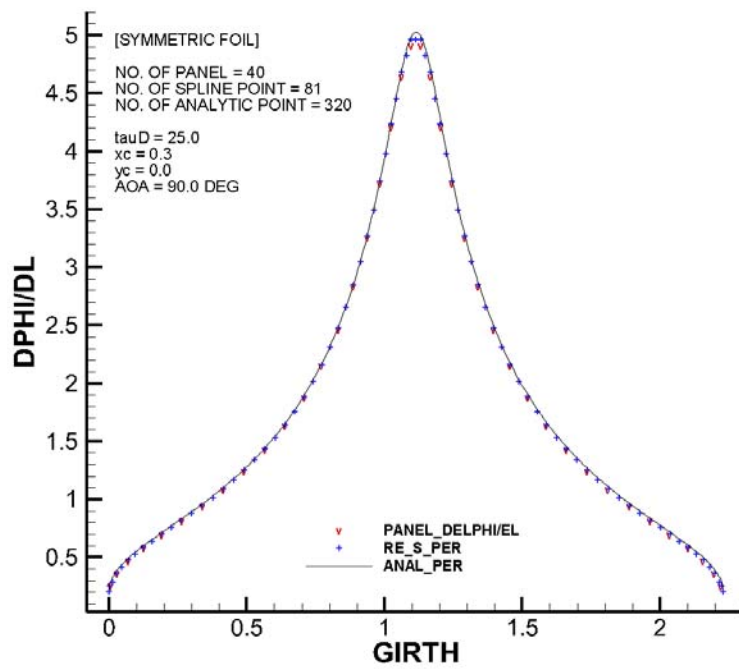


Fig. 31 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

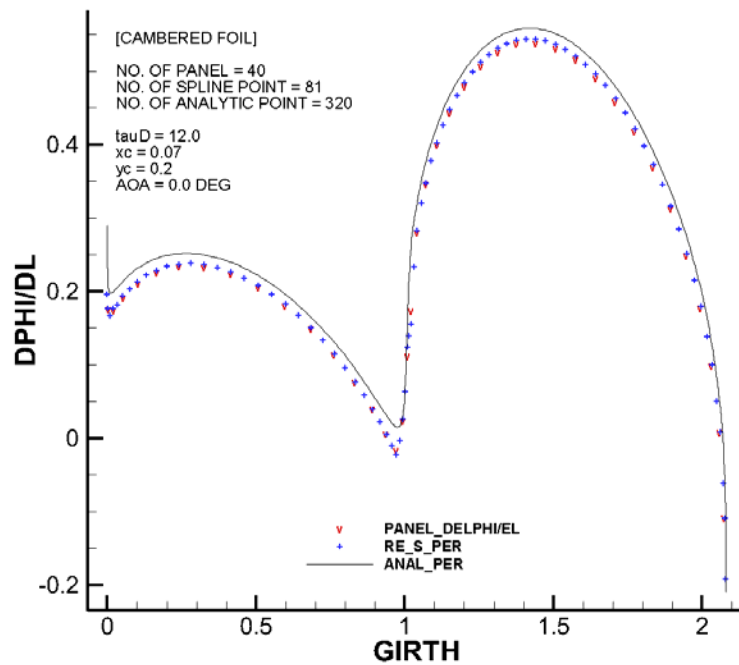


Fig. 32 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Perturbation Velocity using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)



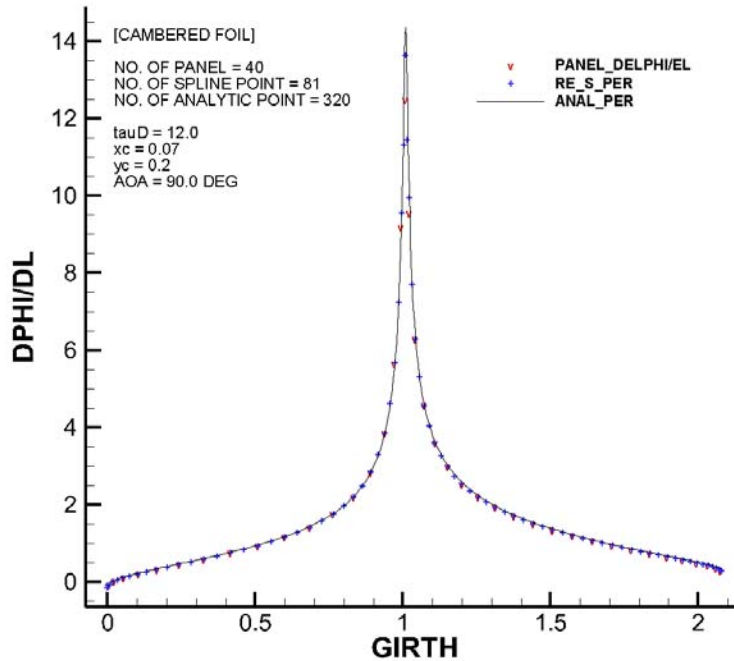


Fig. 33 When Angle of attack = 90°, The verification of Perturbation Velocity using the 1<sub>st</sub> Derivatives of the 2<sub>nd</sub> Order B-Spline Curve (Cambered Foil)

#### 7.1.4 Pressure Coefficient

7.1.3절에서 계산된 섭동 속도를 바탕으로 Bernoulli's Equation을 적절히 변형하여 압력계수를 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$C_p = 1 - \left(\frac{q}{U}\right)^2 \quad (46)$$

where,

q = Oncoming Velocity + Perturbation Velocity

U = 1.0 m/s, for non-dimension

해석적 방법을 통해 구한 섭동속도의 결과가 해석해와 일치하는 것을 바탕으로 우리는 압력계수 또한 해석해와 일치함을 알 수 있다. 더욱이 압력계수가 계산되어지는 패널의 중앙 말고도 그 외의 점에서도 계산이 수행되고 그 결과가 해석해와 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 본 계산에서는 임의의 점을 비교의 편리함을 위해 생성된 패널에 2배에 해당하는 knots를 구성하였기에 절점에서 압력계수가 계산되는 것을 볼 수 있다. 모든 계산 결과의 아래 위치한 그림으로 첨부하였다.

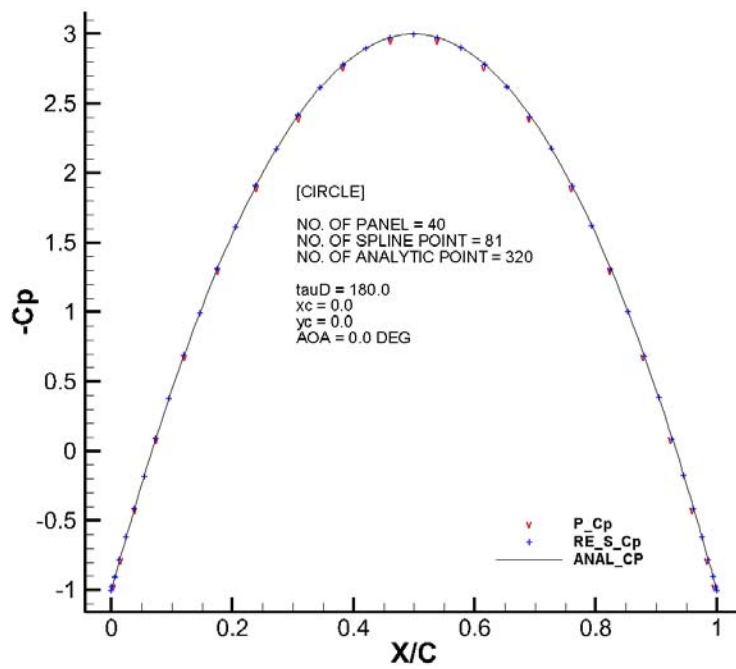


Fig. 34 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)

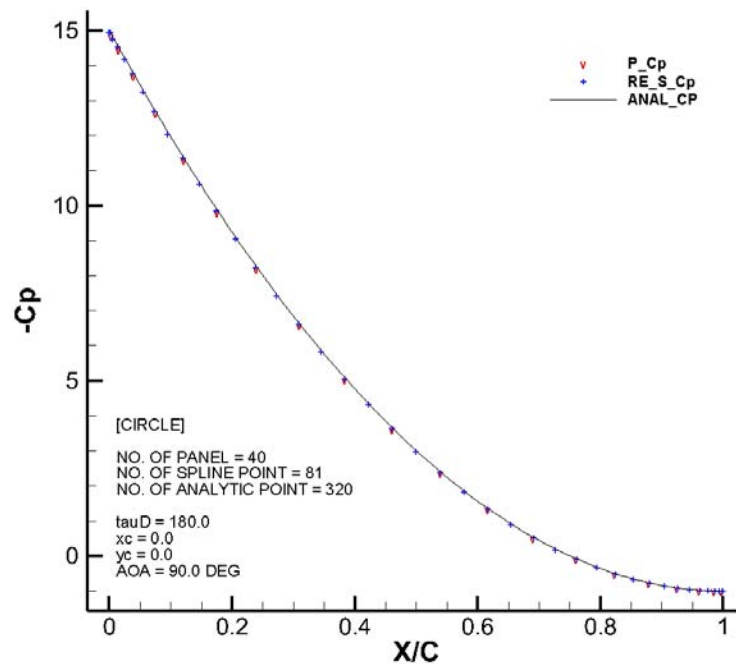


Fig. 35 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Circle)

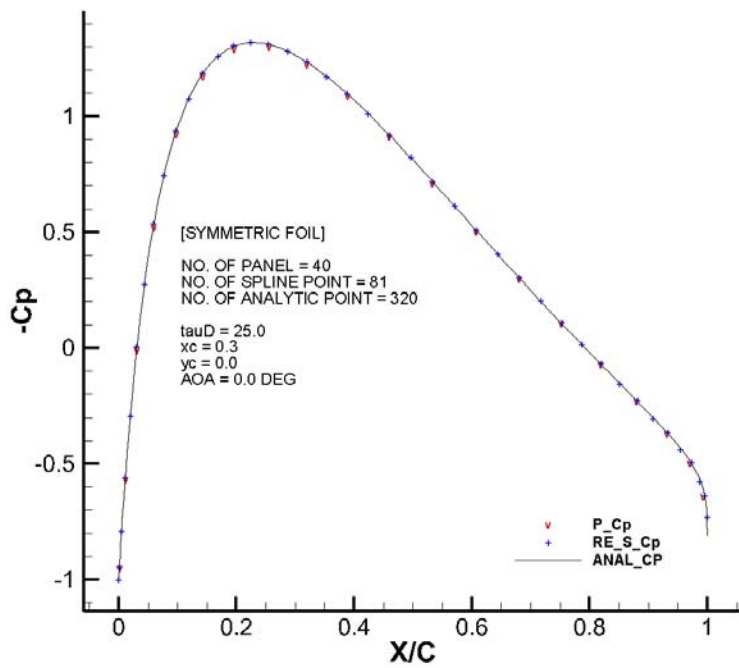


Fig. 36 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

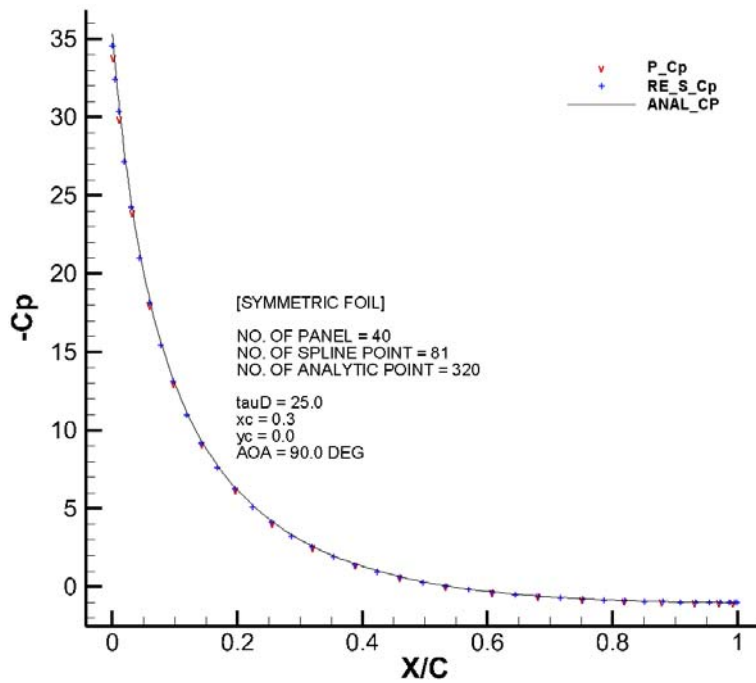


Fig. 37 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Symmetric Foil)

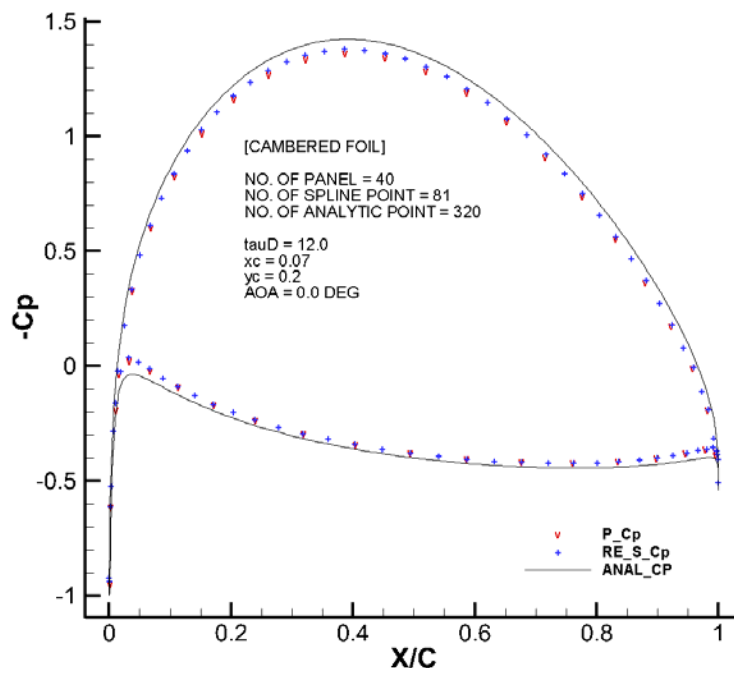


Fig. 38 When Angle of attack =  $0^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)

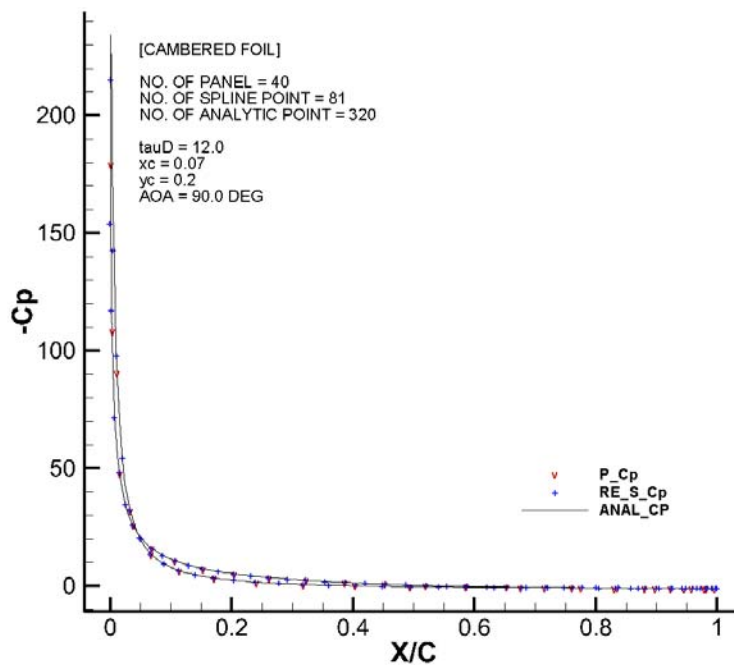


Fig. 39 When Angle of attack =  $90^\circ$ , The verification of Pressure Coefficients using the  $1_{st}$  Derivatives of the  $2_{nd}$  Order B-Spline Curve (Cambered Foil)

### 7.1.5 Error Analysis

각 단면에 대해 받음각이 0도와 90도일 때 모든 계산을 수행하였고, Fig()~Fig()까지 그려진 그래프를 통해 해석적 미분의 결과와 단순차분을 통한 수치미분의 결과보다 정도가 좋은 것을 확인할 수 있었다. 그러나 2차원 날개단면의 유동해석의 경우 포텐셜 이론을 기반으로 수행되어지기에 그 정도의 나음을 그래프를 통해서 확인하는 것에는 한계가 있다.

그렇다고 패널법을 이용한 40개의 결과, B-스플라인이 적용된 81개의 결과, 해석해 320개 모든 결과를 그래프에 표현하여 확인하는 것 또한 쉽지 않은 일이다. 그래서 해석해로부터 얼마큼 떨어져 분포하는가 하는 척도로 사용될 수 있는 표준편차를 활용하여 그 정도의 나음을 비교 및 확인하도록 하겠다.

모든 경우에 대해서 해석적 미분을 할 수 있는 B-스플라인 미분이 적용된 결과가 단순히 패널법의 단순차분을 통한 수치미분의 결과보다 좋은 것을 확인할 수 있다. 특히 원의 경우 기존의 패널법보다 훨씬 좋은 결과를 내는 것 또한 확인 할 수 있다.

Table.

	Perturbation Velocity	Pressure Coefficients	CIRCLE AOA = 0°
Panel_SD	0.012723748765738	0.036837035572450	
Spline_SD	0.001322691634287	0.003463538933955	

Table.

	Perturbation Velocity	Pressure Coefficients	CIRCLE AOA = 90°
Panel_SD	0.011800268938530	0.049005650315096	
Spline_SD	0.005842573125625	0.024706120738258	

Table.

	Perturbation Velocity	Pressure Coefficients	SYMMETRIC _FOIL AOA = 0°
Panel_SD	0.010737059773609	0.023546992166954	
Spline_SD	0.007123126379739	0.008107794055136	

Table.

	Perturbation Velocity	Pressure Coefficients	SYMMETRIC _FOIL AOA = 90°
Panel_SD	0.020158601574164	0.117815419924329	
Spline_SD	0.017219120855645	0.114436346786666	

Table.

	Perturbation Velocity	Pressure Coefficients	CAMBERED _FOIL AOA = 0°
Panel_SD	0.027433576458603	0.057743792597482	
Spline_SD	0.024709492167699	0.047252959541217	

Table.

	Perturbation Velocity	Pressure Coefficients	CAMBERED _FOIL AOA = 90°
Panel_SD	0.027433576458603	0.057743792597482	
Spline_SD	0.024709492167699	0.047252959541217	

### 7.1.6 Force

끝으로 Bernoulli's Equation에서 얻은 압력계수를 x축 성분, y축 성분으로 나누어 각각을 적분하면 Lift Coefficient, Drag Coefficient를 얻을 수 있고, 포텐셜 점프를 허용한 경계조건으로부터  $\Gamma$ (Morino's Gamma)를 계산하여 패널법만을 이용한 결과와 비교한 후 지금까지 수행한 연구가 타당하고 올바른 것인가에 대해 논의하도록 하겠다.

2차원 날개단면의 경우 캠버가 있고 받음각이 생기지 않는 한 항력계수(Drag Coefficient)는 0이 되는 것이 해석해이나 본 연구는 컴퓨터 계산을 수행하였기에 수치 계산에 따른 극히 작은 숫자의 오차가 발생하는 것을 어쩔 수 없는 부분이라 말할 수 있다.

모든 계산에 대해서 비교하고자 하는 3개의 값 모두 패널법만을 이용한 결과와 패널법을 바탕으로 B-스플라인을 적용한 결과가 거의 일치하는 것을 확인할 수 있고 이를 바탕으로 지금까지 수행해온 본 연구가 타당하다고 이야기할 수 있겠다.

Table.

	$C_L$	$C_D$	$\Gamma$	CIRCLE AOA = 0°
Panel	0.00000080	-0.00000001	0.00000038	
Spline	0.00000085	0.00000044	0.00000039	

Table.

	$C_L$	$C_D$	$\Gamma$	CIRCLE AOA = 90°
Panel	12.46071664	-0.00000017	6.24385422	
Spline	12.46116852	-0.00000048	6.24385428	

Table.

	$C_L$	$C_D$	$\Gamma$	SYMMETRIC _FOIL AOA = 0°
Panel	0.00000163	0.00352157	0.00000080	
Spline	0.00000164	0.00351719	0.00000080	

Table.

	$C_L$	$C_D$	$\Gamma$	SYMMETRIC _FOIL AOA = 90°
Panel	8.02874801	0.00000002	4.04958431	
Spline	8.02894147	0.00000023	4.04958439	

Table.

	$C_L$	$C_D$	$\Gamma$	CAMBERED _FOIL AOA = 0°
Panel	1.20556317	0.00246901	0.60393009	
Spline	1.20546824	0.00232506	0.60393009	

Table.

	$C_L$	$C_D$	$\Gamma$	CAMBERED _FOIL AOA = 90°
Panel	6.25439500	0.19275084	3.38613093	
Spline	6.21939051	0.21239049	3.38613093	

## 7.2 Discussion

특이점의 세기가 패널에 걸쳐 균일하여 패널 간 특이점 세기의 단차가 발생하는 균일강도 패널법의 단점을 극복하고자 특이점의 세기가 선형적으로 변하는 부분선형 패널법을 개발하였고 Convergence Test를 통해 충분히 타당하게 쓸 수 있는 값으로 확인하였다.

그러나 이 또한 절점에서 밖에 계산할 수 없다는 단점을 갖고 있기에 보간법의 한 방법으로 B-스플라인을 적용하였고, 단면생성과 포텐셜값을 통해 해석해에 수렴하는 결과를 확인할 수 있었고 더불어 절점 외의 임의의 점에서도 계산이 수행되는 것을 확인할 수 있었다.

끝으로 기존의 패널법의 경우 포텐셜 값을 이용하여 섭동속도 계산 시 단순차분에 의한 수치미분만을 수행해 왔으나 이 또한 해석적 미분은 아니기에 단점으로 말할 수 있다. 본 논문에서는 이를 B-스플라인 미분을 적용하여 포텐셜 값의 해석적 미분을 통한 섭동속도를 계산할 수 있도록 하였으며 그 결과 또한 해석해 대비 수치계산의 분포를 표준편차를 통해 표현하였으며 모든 계산에 대해서 해석적 미분을 수행한 결과가 단순차분에 의한 수치 미분을 수행한 결과보다 정확도가 높은 것을 보였다.

그러나 2차원 단면에 대한 정상유동해석이다 보니 3차원 단면에 대한 해석을 통해 Surface미분을 수행하지 못하였고, 날개단면의 Trailing Edge를 형성하는 첫 번째 절점과 마지막 절점에서의 기울기를 정의하는 어려움이 있어 첫 번째 패널과 마지막 패널의 접선방향 기울기와 동일하게 준 점은 향후 연구에 있어 극복하고 발전해나가야 할 사항으로 해결이 된다면 좀 더 정확한 해석을 할 수 있을 것으로 기대된다.



# REFERENCES

[1] Chung-Ho Cho, Gun-Do Kim, Chang-Sup Lee, 1999. Analysis of Two-dimensional Hydrofoil Problems Using Higher Order Panel Method based on B-Splines, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 36(4), pp.9-20

[2] Chung-Ho Cho, Chang-Sup Lee, 2000. Numerical Experimentation of a 2-D B-Spline Higher Order Panel Method, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 37(3), pp.27-36.

[3] Jin-Tae Lee, 1987. A Potential Based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in Steady Flow, Ph.D Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T

[4] Gun-Do Kim, 2003. Application of high order panel method for improvement of prediction of marine propeller performance, Ph.D Thesis, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, C.N.U

[5] Justin E. Kerwin, Jacques B.Hadler, 2010. The Principles of Naval Architecture Series. The Society of Naval Architects and Marine Engineers.

[6] Jack Moran, 1983. An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics. Dover Publications

[7] Gi-Duck Park, Jin-An Oh, Jin-Tae Lee, 2015. Flow Analysis around a Wing Section by a Piecewise Linear Panel Method, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, 52(5) pp.380-386

[8] Les Piegl, Wayne Tiller, 1997. The Nurbs Book.

## Appendix

# A. PANEL CODE의 검증

## A.1 Influence Coefficient

### A.1.1 Deriving Influence Coefficient

#### A.1.1.1 Constantly Distributed Singularity Strength

우선 패널에 걸쳐 특이점의 세기가 선형적으로 변하는 기존의 방법의 influence coefficient를 검증하고자 하였다. 이에 앞서 수식에 쓰인 값들을 정리하면 다음과 같다.

$$dph = \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{tx-D}{ty}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{tx}{ty}\right) \quad (47)$$

$$R1 = \sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2} \quad (48)$$

$$R2 = \sqrt{(x-\xi_2)^2 + (y-\eta_2)^2} \quad (49)$$

우선 특이점 쏘스(source)에 의한 포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_{s.c} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \log[(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi, (\eta \rightarrow 0) \\ &= -\frac{1}{2} [(tx-\xi) \log[(tx-\xi)^2 + ty^2] + 2ty \tan^{-1}\left(\frac{tx-\xi}{ty}\right) - 2(tx-\xi)] \\ &= -\left[ (tx-D) \log[(tx-D)^2 + ty^2]^{\frac{1}{2}} + ty \tan^{-1}\left(\frac{tx-D}{ty}\right) - (tx-D) \right]_0^D \\ &\quad + [tx \log[tx^2 + ty^2]^{\frac{1}{2}} + ty \tan^{-1}\left(\frac{tx}{ty}\right) - tx] \\ &= tx^*(\log(R1/R2)) + D(\log R2 - 1) - ty*dph \end{aligned} \quad (50)$$

다음으로 특이점 다이폴(dipole)에 의한 포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{d.c} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{\partial}{\partial \eta} \log[(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{-2(ty-\eta)}{(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2} d\xi, (\eta \rightarrow 0) \\
&= \left[ \tan^{-1} \left( \frac{tx-\xi}{ty} \right) \right]_0^D \\
&= \tan^{-1} \left( \frac{tx-D}{ty} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{tx}{ty} \right) \\
&= \theta_2 - \theta_1 \\
&= dph
\end{aligned} \tag{51}$$

### A.1.1.2 Linearly Distributed Singularity Strength

패널에 걸쳐 선형적으로 특이점의 세기가 변하는 부분선형패널법에서의 influence coefficient는 다음과 같다

첫 번째로, Fig. 5에 명시된 DR Dipole에 의한 포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{D.R} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{\xi}{D} * \frac{\partial}{\partial \eta} \ln[(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi, \eta \rightarrow 0 \\
&= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{\xi}{D} * \frac{-ty}{(tx-\xi)^2 + ty^2} d\xi
\end{aligned} \tag{52}$$

다음으로 치환적분을 사용하기 위한 새로운 적분변수를 설정한다

$$\begin{aligned}
tx - \xi &= X \rightarrow \xi = tx - X \\
ty &= Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\xi &= -dX \\
d(ty) &= dY
\end{aligned}$$

$$\phi_{D.R} = \int_{X=tx}^{X=tx-D} \frac{(tx-X)}{D} \frac{-Y}{X^2 + Y^2} (-dX) = \frac{1}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{(tx-X)Y}{X^2 + Y^2} dX \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{D.R} &= \frac{1}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{(tx-X)Y}{X^2+Y^2} dX \\
&= \frac{1}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{txY}{X^2+Y^2} dX - \frac{1}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{XY}{X^2+Y^2} dX \\
&= \frac{txY}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{1}{X^2+Y^2} dX - \frac{Y}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{X}{X^2+Y^2} dX
\end{aligned} \tag{54}$$

끝으로 적분표를 이용하거나 자연로그 미분법을 상기하여 최종적으로 적분식을 정리하면 다음과 같다

$$\begin{aligned}
\phi_{D.R} &= \frac{txY}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{1}{X^2+Y^2} dX - \frac{Y}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{X}{X^2+Y^2} dX \\
&= \frac{txY}{D} \left[ \frac{1}{Y} \tan^{-1}\left(\frac{X}{Y}\right) \right]_{tx}^{tx-D} - \frac{Y}{D} \left[ \frac{1}{2} \ln(X^2+Y^2) \right]_{tx}^{tx-D} \\
&= \frac{tx}{D} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{tx-D}{ty}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{tx}{ty}\right) \right] - \\
&\quad \frac{ty}{D} \left[ \ln \sqrt{(tx-D)^2+ty^2} - \ln \sqrt{tx^2+ty^2} \right] \\
&= \frac{1}{D} \left[ tx(\theta_2 - \theta_1) - ty \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]
\end{aligned} \tag{55}$$

두 번째로, Fig. 6에 명시된 DL Dipole에 의한 포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{D.L} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \left(1 - \frac{\xi}{D}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln[(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi, \eta \rightarrow 0 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{\xi=D} \left(1 - \frac{\xi}{D}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln[(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2] d\xi, \eta \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} \ln[(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2] &= \frac{2(ty-\eta)(-1)}{(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2} \\
&= \frac{2(\eta-ty)}{(tx-\xi)^2 + (ty-\eta)^2}
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{D.L} &= \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{\xi=D} \left(1 - \frac{\xi}{D}\right) \frac{2(\eta - ty)}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi, \eta \rightarrow 0 \\
&= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{ty}{D} \frac{\xi}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi - \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{ty}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi
\end{aligned} \tag{58}$$

첫 번째 과정과 동일하게 치환적분을 사용하기 위해 새로운 변수를 설정하고 그 변수에 해당하는 적분 구간을 새롭게 설정하도록 한다

$$\begin{aligned}
tx - \xi &= X \rightarrow \xi = tx - X \\
ty &= Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\xi &= -dX \\
d(ty) &= dY
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{D.L} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{ty}{D} \frac{\xi}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi - \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{ty}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi \\
&= \frac{Y}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{tx - X}{X^2 + Y^2} (-dX) + Y \int_{tx}^{tx-d} \frac{1}{X^2 + Y^2} (dX)
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{D.L} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{ty}{D} \frac{\xi}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi - \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{ty}{(tx - \xi)^2 + (ty - \eta)^2} d\xi \\
&= \frac{Y}{D} \int_{tx}^{tx-D} \frac{tx - X}{X^2 + Y^2} (-dX) + Y \int_{tx}^{tx-d} \frac{1}{X^2 + Y^2} (dX)
\end{aligned} \tag{60}$$

위 식의 앞 항은  $\phi_{DR}$  계산 시 한 번 계산한 것으로 뒷항의 전개식만 적도록 하겠다.

$$\begin{aligned}
&Y \int_{tx}^{tx-D} \frac{1}{X^2 + Y^2} dX \\
&= Y \left[ \frac{1}{Y} \tan^{-1} \left( \frac{X}{Y} \right) \right]_{tx}^{tx-D} = \theta_2 - \theta_1
\end{aligned} \tag{61}$$

앞 항과 뒷 항을 더해서 정리하면 아래와 같은 최종식을 얻을 수 가 있다.

$$\phi_{DL} = (\theta_2 - \theta_1) \left(1 - \frac{ty}{D}\right) + \frac{ty}{D} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \tag{62}$$

### A.1.2 Convergence Test

본 연구는 부분선형 패널법의 결과를 바탕으로 B-스플라인이 적용하고자 하는 것이 목표이기에 먼저 부분선형 패널법만을 가지고 2차원 날개단면 주위의 유동을 해석한 결과가 해석해와 잘 일치하는지 확인하는 것이 필요했다.

그 이유는 B-스플라인을 적용할 결과가 해석해와 일치하지 않는다면 적용 후에도 일치하지 않을 것이고 이는 본 연구를 수행하는 목표가 사라지는 것과 다름이 없기 때문이다.

먼저 패널의 개수를 8개, 16개 40개 80개의 순서로 늘려가며 대칭성을 띄는 날개단면을 가지고 계산을 수행하였고 각 계산의 결과가 패널 개수가 점차 늘어남에 따라 해석해에 수렴하는지 여부를 확인하기 위해서 포텐셜(PHI), 섭동 속도, 압력계수 3가지 값을 사용하였다.

그 결과 패널의 개수가 늘어남에 따라 모든 결과들이 해석해에 수렴하는 것을 확인할 수 있었고 일정 개수 이상의 패널에 대해서는 결과값들이 거의 일치함을 통해 개수의 증가에 따른 정확도의 증가를 이야기 하는 것이 효율성 측면에서 무의미함을 알 수 있었다. 따라서 부분선형 패널법이 타당하고 옳은 방법이라는 결론을 가지고 B-스플라인을 적용하는 연구를 수행할 수 있었다.

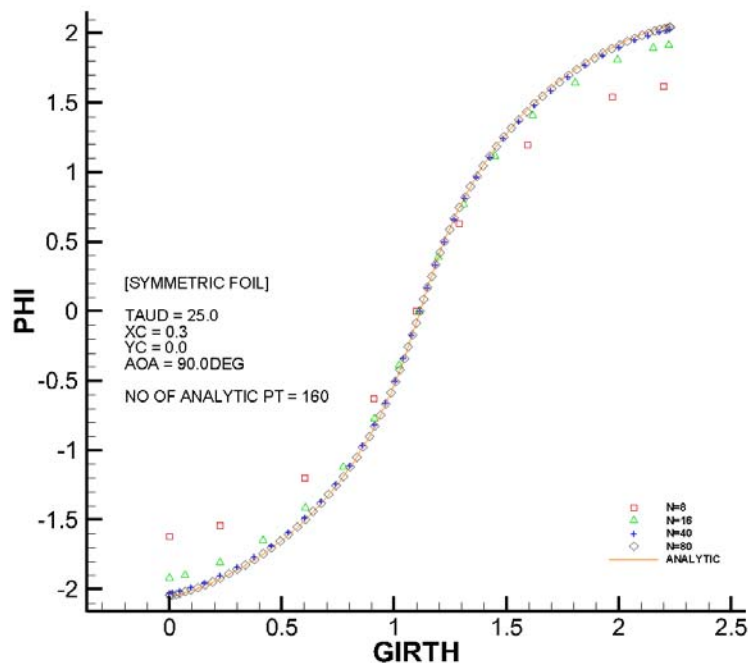


Fig. 40 The verification of the piecewise linear panel method using Convergence Test (Potential, Symmetric Foil)

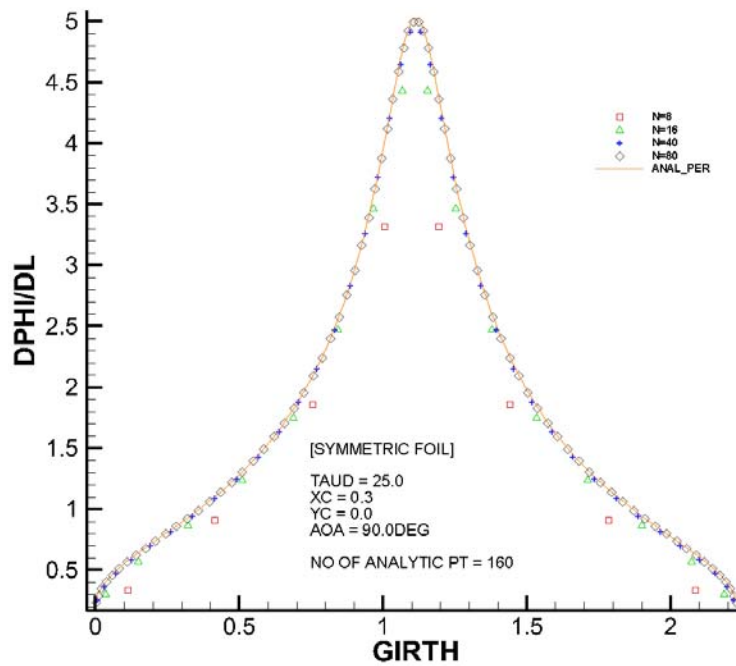


Fig. 41 The verification of the piecewise linear panel method using Convergence Test (Perturbation Velocity, Symmetric Foil)

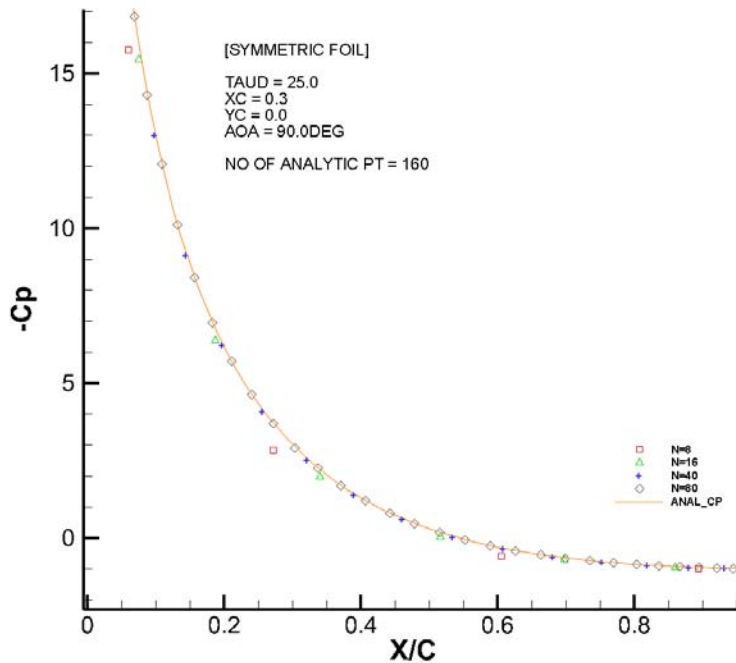


Fig. 42 The verification of the piecewise linear panel method using Convergence Test (Pressure Coefficients, Symmetric Foil)

## B. ORDER EFFECT

본 연구에 적용된 B-스플라인의 경우 표현하고자 하는 곡선의 차수를 정할 수 있고 그 차수는 우리가 수학에서 정의하고 사용하는 차수의 곡선과 동일하다고 할 수 있다. 예를 들어 1차의 경우, 직선으로 표현되고 2차의 경우 포물선으로 표현되는 부분이다.

그러면 차수가 올라가면 올라갈수록 더 곡률을 잘 따라가고 곡선을 잘 표현할 수 있지 않을까 하는 의문을 가지고 2차와 3차를 사용하여 캠버가 있는 곡률이 심한 날개 단면에 대해 차수의 영향을 조사하였다.

그 결과 단면형상과 포텐셜을 경우 3차 곡선으로도 표현이 가능하였지만 섭동속도의 경우 포텐셜이 3차로 표현되면 섭동속도는 미분을 하였기에 한 차수 낮은 2차 곡선으로 표현되는데 날개 끝단 즉 Trailing edge 부근에서 해석해를 쫓아가지 못하는 것을 볼 수 있다. 반면에 단면형상과 포텐셜이 2차 곡선으로 표현되고 섭동속도가 1차 직선으로 표현되는 경우에는 3가지 경우 모두 잘 쫓아가는 것을 확인할 수 있었고 본 연구에 필요한 B-스플라인 곡선을 표현하는 최적의 차수는 2차임을 알 수 있었다.

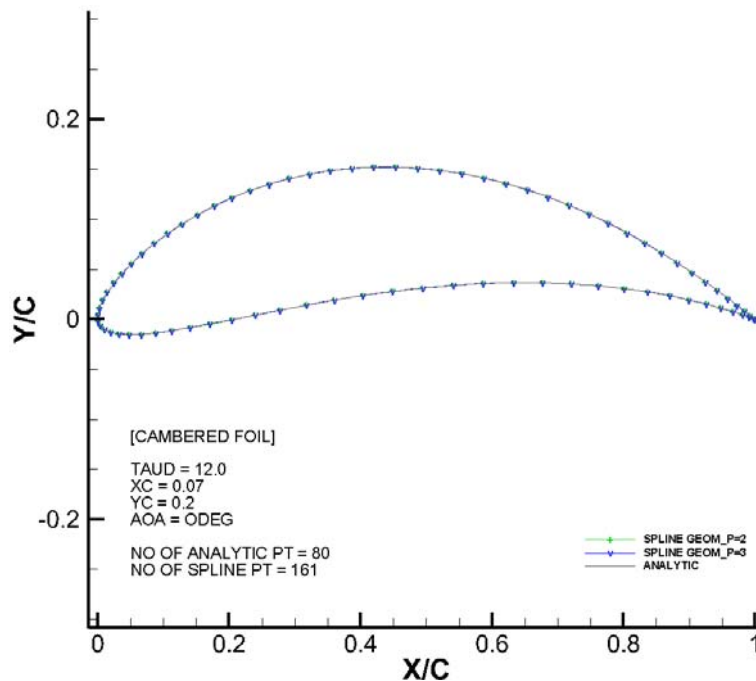


Fig. 43 Research results for order effect about potential (Symmetric foil)



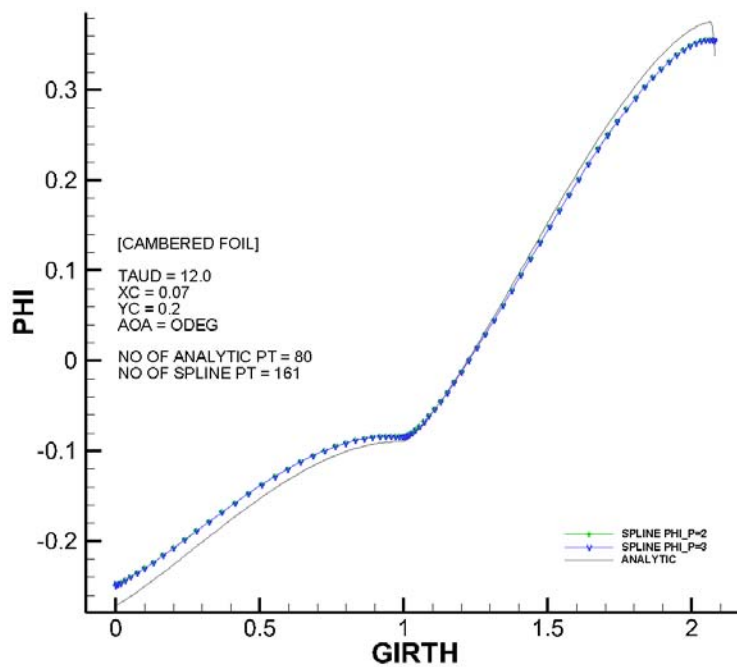


Fig. 44 Research results for order effect about perturbation velocity (Symmetric foil)

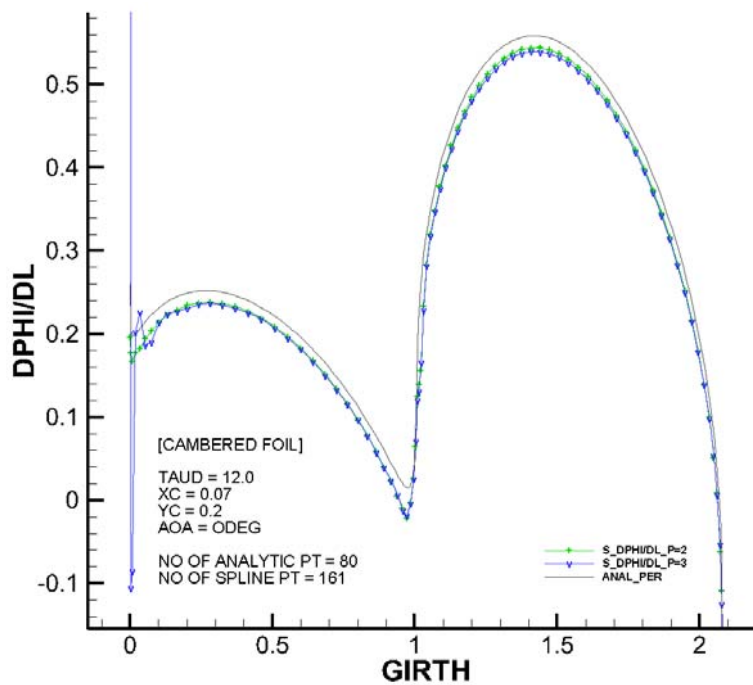


Fig. 45 Research results for order effect about pressure coefficients (Symmetric foil)

## C. Differential at 1<sup>st</sup> and (N+1)<sup>st</sup> points

패널법만을 이용할 때에는 섭동속도와 압력계수가 패널의 중앙에서 계산되기에 접선방향과 법선방향을 정의함에 있어 큰 어려움이 없다. P17 EQ()에 따르면 한 개의 패널에서 접선벡터 및 법선벡터를 정의하는데는 DX, DY, EL 3개의 변수가 필요하다.

그러나 B-스플라인 미분을 활용 시 해석적으로 미분을 수행하고 절점에서의 기울기를 구할 수 있다는 장점이 있으나 날개 단면과 같이 닫힌 폐곡선의 경우 그 끝점에서 기울기를 정의함에 있어 어려움이 발생한다.

대칭인 날개 단면 형상의 날개 끝 부분을 통해 직접 그 어려움을 확인하고 해결할 방법에 대해 논의하도록 하겠다.

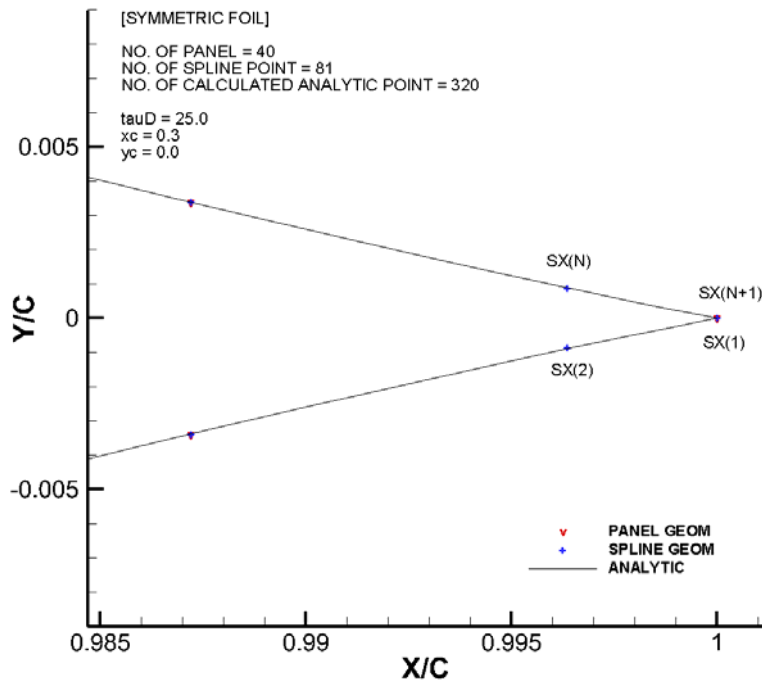


Fig. 46 Description of a trailing edge in a symmetric foil for the differentail at 1<sup>st</sup> and (N+1)<sup>th</sup> Node

$$\frac{\partial x}{\partial u}(1) = -0.0767, \quad \frac{\partial x}{\partial u}(2) = -0.51195$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{SX(2) - SX(1)}{knots(2) - knots(1)} = -0.29131 = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}(1) + \frac{\partial x}{\partial u}(2)}{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(1) = -0.00322, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(2) = -0.13533$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{SY(2) - SY(1)}{knots(2) - knots(1)} = -0.06928 = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}(1) + \frac{\partial y}{\partial u}(2)}{2}$$

where,

$$\vec{U} = \left[ \frac{0}{80}, \frac{1}{80}, \dots, \frac{79}{80}, \frac{80}{80} \right], \text{ variables of knots}$$

$\frac{\partial x}{\partial u}(k)$  = B-스플라인 미분을 활용, 절점에서 x좌표를 knots에 대해 미분

$\frac{\partial y}{\partial u}(k)$  = B-스플라인 미분을 활용, 절점에서 y좌표를 knots에 대해 미분

( k = 1,2,3, ... , N-1, N, N+1)

$\frac{dx}{du}$  = x좌표와 knots를 이용한 단순 차분

$\frac{dy}{du}$  = y좌표와 knots를 이용한 단순 차분

위 결과를 보면  $i_{th}$  절점와  $(i+1)_{th}$  절점에서의 평균값이 단순차분을 통한 기울기 값과 같음을 알 수 있었고 이를 바탕으로 첫 점과 끝 점에서의  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}$ 는 (x,y)좌표와 knots\_u를 이용한 단순차분 값과 같다는 식을 세울 수 있었다.

$$\frac{\partial x}{\partial u}(1) = \frac{SX(2) - SX(1)}{knots(2) - knots(1)}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}(N+1) = \frac{SX(N+1) - SX(N)}{knots(N+1) - knots(N)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(1) = \frac{SY(2) - SY(1)}{knots(2) - knots(1)}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(N+1) = \frac{SY(N+1) - SY(N)}{knots(N+1) - knots(N)}$$

where,

SX(k) = B-스플라인을 활용하여 구한 Geometry의 x좌표

SY(k) = B-스플라인을 활용하여 구한 Geometry의 y좌표

( k = 1,2,3, ... , N-1, N, N+1)