



## 저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#) 

공학석사 학위논문

국부적 불연속을 가진 도파관 모델의  
파동전파 해석 기법

Analysis of wave propagation of waveguide  
structure having a local discontinuity

울산대학교 대학원  
조선해양공학부  
홍소량

국부적 불연속을 가진 도파관 모델의  
파동전파 해석 기법

지도교수 유정수

이 논문을 공학석사학위 논문으로 제출함

2020년 2월

울산대학교 대학원  
조선해양공학부  
홍소랑

홍소량의 공학석사학위 논문을 인준함

심사위원 최윤락 인

심사위원 유정수 인

심사위원 서형석 인

울산대학교 대학원

2020년 2월

## 국문 요약

단면의 형상이 길이방향으로 일정한 도파관 구조물에 조인트, 지지구조, 결합 등의 국부적 불연속이 존재하는 경우, 파동 전파 특성을 파악하기 위해서 국부적 불연속 구간을 유한요소(Finite element)로 모델링하고 나머지 구간을 스펙트럴 슈퍼요소(Spectral super element)로 결합하여 해석하는 방법이 제안되었다. SSE는 FE와 동일하게 단면을 모델링할 수 있으므로 SSE와 FE 결합 시 단면의 노드압축 없이 연결이 가능하다. 따라서 복잡한 단면을 가진 도파관에 대한 고주파수 대역 해석이 가능한 방법이다. 하지만 SSE/FE 방법은 고주파수 대역 해석을 위해 FE 모델의 크기가 커질수록 모델링 및 연산에 많은 시간이 소요된다는 단점을 가진다. 이 문제를 보완하여 보다 효율적인 해석을 위해 본 논문에서는 FE 대신 SSE를 사용하는 SSE/SSE 방법을 소개하고 기존의 SSE/FE 방법과 비교하여 SSE/SSE 방법의 유용성을 살펴본다. 이를 위해 단순 사각 단면을 가진 도파관 구조물에 대해 SSE/FE 방법과 SSE/SSE 방법을 이용해 파동의 투과 및 반사 특성을 구하고, 이들이 가지는 오차를 비교하였다. 이를 통해 SSE/SSE 방법의 신뢰성과 유용성을 확인하였다.

## 영문 요약

In case that the waveguide structures with uniform cross-section in the longitudinal direction have a local discontinuity such as a joint, supporting structure and defect, the analytical method which is combining the finite element modeled section for a local discontinuity and the spectral super element modeled section for the rest of the structure has been introduced to investigate the characteristics of wave propagation on waveguide structures. It is possible to connect SSE and FE without shortening the nodes of the cross-section because SSE modeled cross-section is the same as FE modeled cross-section. Therefore, this method can be used for analyzing the waveguide structures having complicated cross-section at higher frequencies. However, the demerit of this SSE/FE method is that modeling and calculating the FE model require a lot of time at higher frequencies. To strengthen this weakness, the present paper introduced SSE/SSE method instead of SSE/FE for efficient analysis and figured out the usefulness of SSE/SSE method as compared with the conventional SSE/FE method. So that, wave reflection and transmission properties in waveguide structures with simple rectangular cross-section are estimated using both SSE/FE and SSE/SSE method and numerical errors are determined. And then, the feasibility and reliability of SSE/SSE method are checked.

# 목차

1. 서론
2. 도파관 유한 요소법 (Waveguide Finite Element Method)
  - 2.1 운동방정식
  - 2.2 분산관계
3. 스펙트럴 슈퍼 요소법 (Spectral Super Element Method)
  - 3.1 파동해
  - 3.2 도파관 변위 함수
  - 3.3 동적 강성 행렬
4. 스펙트럴 슈퍼 요소/스펙트럴 슈퍼 요소 (SSE/SSE)
  - 4.1 SSE/FE 연결
  - 4.2 SSE/SSE 연결
  - 4.3 입사파 모델링
  - 4.4 파워 반사계수 및 파워 투과계수
5. SSE/SSE 방법의 적용 예
  - 5.1 해석 모델
  - 5.2 오차 해석
6. 결론

# 1. 서론

튜브나 파이프와 같이 길이방향으로 단면의 형상이 일정한 도파관(waveguide)을 따라 전파하는 파동의 특성을 파악하는 것이 여러 분야에서 적용되고 있다. 그 예로 음향탐지장비 중 하나인 잠수함에 연결되는 예인 센서의 자체소음을 줄이기 위해 자체소음에 기여하는 파동의 특성을 파악하는데 사용될 수 있다. 또한 요즘 각광받고 있는 신재생 에너지 발전장치에도 파동 전파를 이용하여 에너지를 생산하는데 쓰이고 있다. 그리고 길이방향으로 긴 도파관 형상 구조물의 상태를 진단하고자 할 때 구조물을 따라 전파하는 파동의 특성을 통해 결함의 위치를 찾아볼 수 있는데 사용된다.

전파하는 파동의 특성을 알아보기 위해서는 길이가 무한한 도파관에 대한 해석이 필요하다. 보편적 수치 해석 기법으로 유한 요소법(finite element method, FEM)과 경계 요소법(boundary element method, BEM)이 있으나, 이 방법들은 모델링에 아주 많은 요소(element)가 필요하다는 어려움이 있다.

그래서 무한 길이 도파관을 해석하기 위해 도파관 유한 요소법(waveguide finite element method, WFEM)이 제안되었으며 참고문헌 [1]에서 Lagrange의 방정식을 이용하여 그 식을 유도하였다. 참고문헌 [2]에서는 Hamilton의 방정식을 이용하여 도파관 단면의 운동방정식을 정의하고 길이방향으로 전파하는 파동을 해석하였으며, 반해석적 유한 요소법(semi-analytical finite element method, SAFEM)이라고 칭하였다. 유체가 채워진 도파관에 대해서는 참고문헌 [3]에서 얇은 벽면을 가진 덕트의 임의의 단면에 대한 파동 해석, 참고문헌 [7] 및 [10]에서 실린더형 파이프에 대한 파동 전파 특성을 분산관계(dispersion relation)를 통해 해석하였다.

참고문헌 [5]에서는 결함이나 흠 등 도파관에 국부적 불연속이 있을 때 파동 전파를 알기 위해 국부적 불연속 구간은 유한 요소법으로, 반무한 구간은 스펙트럴 요소법 (spectral element method, SEM)으로 모델링하여 결합한 해석법을 사용한다. 유한 요소 (finite element, FE) 와 스펙트럴 요소 (spectral element, SE) 를 연결하기 위해 만나는 경계에서 경계면의 노드를 하나로 줄여 자유도를 같게 만들어주는 노드압축법을 이용한다. 또한 참고문헌 [6]은 FE 와 SE 가 연결된 모델에 대해 반사 및 투과계수 예측을 위한 입사파를 만들어 반사파와 투과파의 특성을 추정하였다. 하지만 스펙트럴 요소법은 경계면의 노드를 하나로 만들어 주기 때문에 저주파수 대역에서 단면 변형을 고려하지 않는 방법으로 고주파수 대역에서는 적합한 방법이 아니다.

고주파수 대역 해석에서는 임의의 단면을 가진 도파관에 대해 해석 가능한 도파관 유한 요소법 (WFEM)이 쓰이고 있으며 참고문헌 [4]에서 도파관 유한 요소법과 스펙트럴 유한 요소법 (spectral finite element method, SFEM)을 결합한 스펙트럴 슈퍼 요소법 (spectral super element method, SSEM)을 제안하여 유한길이



관 구조물의 진동 해석에 적용하였다.

본 연구에서는 참고문헌 [4]의 SSEM을 이용하여 무한길이 도파관의 반무한 구간과 국부적 불연속 구간을 모두 스펙트럴 슈퍼 요소 (spectral super element, SSE) 모델링하여 결합한 해석법인 SSE/SSE 방법을 국부적 불연속 구간을 FE 모델링한 SSE/FE 방법과 비교해 보고 파워 반사계수와 파워 투과계수를 추정하여 그 유용성을 검증해 보았다.

## 2. 도파관 유한 요소법 (Waveguide Finite Element Method)

### 2.1 운동방정식

도파관이란 단면 형상이 길이방향으로 일정한 구조물을 뜻하며, 도파관 유한 요소법(waveguide finite element method, WFEM)은 무한길이 도파관의 단면을 유한 요소로 모델링하여 도파관의 길이방향 파동 전파를 분석하는 기법을 말한다. 이 방법은 파수 유한 요소법(wavenumber finite element method, WFEM) 또는 반해석적 유한 요소법(semi-analytical finite element method, SAFEM)이라고도 칭하며 3차원 형상의 도파관을 완전히 모델링하는 대신 도파관의 단면 형상만 2차원 모델링하여 길이방향 파동을 해석한다.

전파하는 파동이 길이방향으로 조화 진동을 한다고 가정하면 각  $x, y, z$  방향의 변위인  $u, v, w$ 를 변수분리하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \chi(y, z) \tilde{u} e^{-j\kappa x} e^{j\omega t} \\ v(x, y, z, t) &= \psi(y, z) \tilde{v} e^{-j\kappa x} e^{j\omega t} \\ w(x, y, z, t) &= \xi(y, z) \tilde{w} e^{-j\kappa x} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서  $\kappa$ 는 파수(wavenumber),  $\omega$ 는 각주파수(angular frequency),  $\chi(y, z)$ ,  $\psi(y, z)$ ,  $\xi(y, z)$ 는 단면의  $x, y, z$  방향 모드형상이고,  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ 는 임의 상수 (scaling constants),  $e^{j(\omega t - \kappa x)}$ 는 시간과 공간에 대해 주기적인 진동을 하는 조화 진동을 나타낸 것이다. 참고문헌 [1]에서 유도된 WFE 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\left\{ \mathbf{K}_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{K}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{K}_0 + \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \mathbf{u}(x, t) = 0 \quad (2.2)$$

$\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_0$ 는 모델의 강성(stiffness)과 관련된 행렬을 나타내며  $\mathbf{M}$ 은 질량(mass) 행렬이다. 식 (2.1)에서처럼 변위  $\mathbf{u}(x, t)$ 는  $\tilde{\boldsymbol{\phi}} e^{j(\omega t - \kappa x)}$ 이므로, 위 식에 대입하면 식 (2.3)과 같이 표현된다.

$$\{ \mathbf{K}_2 (-j\kappa)^2 + \mathbf{K}_1 (-j\kappa) + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M} \} \tilde{\boldsymbol{\phi}} = 0 \quad (2.3)$$

여기서  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ 는 단면의 변위이며 파동의 변형 형상을 나타내고, 식 (2.3)은 두 개의 변수인 파수 ( $\kappa$ )와 각주파수 ( $\omega$ )를 가지는 고유치 문제 (eigenvalue problem)로 볼 수 있으며, 두 개의 변수 중 하나를 임의로 대입하여 풀 수 있다. 즉, 임의의 파수를 대입하여 각주파수를 구하면 일반적인 고유치 문제 형식이 되고 임의의 각주파

수를 대입하여 파수를 구하면 다항 고유치 문제 형식이 된다.

## 2.2 분산관계

이상적인 파동과는 달리 실제의 파동은 파장에 따라 파속이 달라지는데 이를 분산(dispersion)이라 하며 분산관계(dispersion relation)를 통해 전파하는 파동의 특성을 파악해 볼 수 있다. 도파관의 길이 방향으로 전파하는 파동의 분산관계를 얻기 위해서는 도파관 운동방정식에 임의의 파수들을 대입하여 각 파수에 대한 주파수를 구하는 방법으로 풀 수 있다.

본 절에서는 속이 비어있는 실린더형 도파관을 따라 길이방향으로 전파하는 파동의 분산관계를 이론해석 및 수치해석을 통해 구해보고자 한다. 이론해석을 위해 참고문헌 [7]에서 제시한 이론식을 이용하였으며 수치해석을 위해 속이 비어있는 실린더형 도파관의 단면을 모델링한 후 MATLAB을 이용하여 구해보았다.

먼저 참고문헌 [7]의 실린더에 대한 운동방정식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{nm} \\ V_{nm} \\ W_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

여기서  $n$  은 실린더 단면의 원주방향 모드,  $m$  은 반경방향 모드를 나타내며  $U, V, W$  는 각각  $x$  방향, 원주방향 그리고 반경방향 변위의 크기를 나타낸다. 이 행렬식이 자명해(trivial solution) 이외의 해를 가지기 위해서는 강성을 나타내는 행렬  $L$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 행렬식  $\det([L])=0$ 을 만족해야 한다. 먼저 실린더 내부가 비어있는 경우, 행렬  $L$ 의 원소는 다음과 같다.

$$L_{11} = -\Omega^2 + (\kappa_{nm}a)^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2, \quad L_{12} = \frac{1}{2}(1+\nu)n(\kappa_{nm}a), \quad L_{13} = \nu(\kappa_{nm}a), \quad (2.5a-c)$$

$$L_{21} = L_{12}, \quad L_{22} = -\Omega^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)(\kappa_{nm}a)^2 + n^2, \quad L_{23} = n, \quad (2.5d-f)$$

$$L_{31} = L_{13}, \quad L_{23} = L_{23}, \quad L_{33} = -\Omega^2 + 1 + \beta^2[(\kappa_{nm}a)^2 + n^2]^2 \quad (2.5g-i)$$

여기서  $\Omega$ 는 무차원 주파수로써  $\Omega = \omega a/c_L$ 로 정의되며  $c_L$ 은 종파(longitudinal wave)의 전파 속도,  $\nu$ 는 프아송 비(Poisson's ratio),  $\beta$ 는 파이프 두께 매개변수로  $\beta^2 = h^2/12a^2$ 이며  $h$ 와  $a$ 는 각각 파이프의 두께와 반경을 나타낸다. 위의 식들에 임의의 파수들을 대입하여 고유치 문제를 풀어 각 파수에 대한 주파수를 구하고 이를 그래프로 그린 것을 그림 1에 나타내었다.

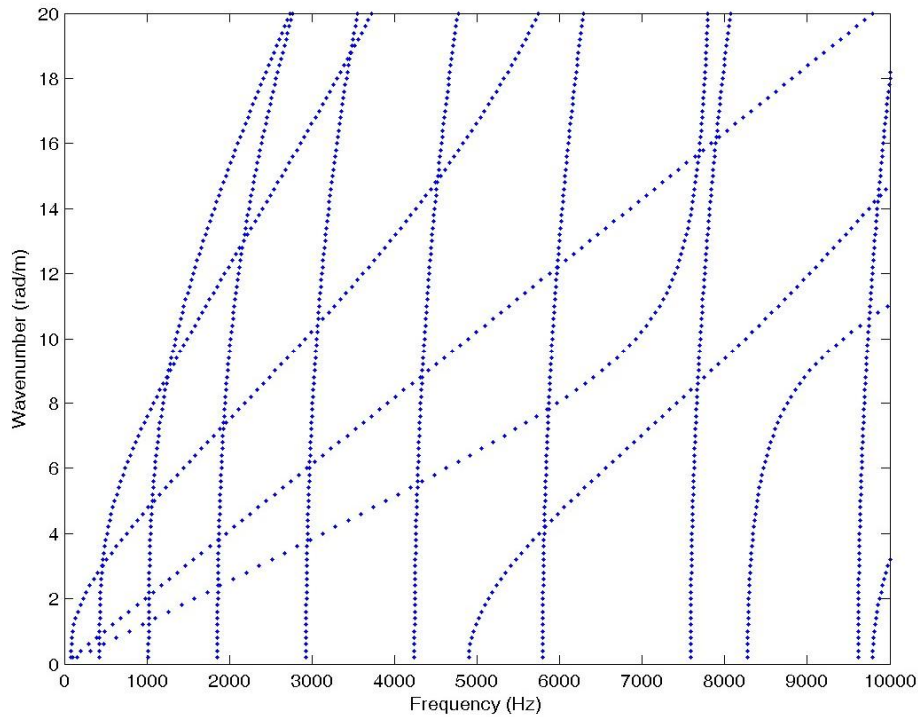


그림 1. 속이 비어있는 실린더형 도파관 모델의 이론해석을 통해 구한 분산선도.

그림 1에서 각 선들은 실린더형 도파관을 따라 전파하는 파동을 나타낸다. 또한 각 파동의 위상속도(phase velocity)는 파수에 대한 주파수( $\frac{\omega}{\kappa}$ )이며 선의 기울기가 작을수록 위상속도가 빠르다. 파동의 군속도(group velocity)를 나타내는 것은 접선의 기울기( $\frac{\partial\omega}{\partial\kappa}$ )이며 위상속도와 군속도가 같을 경우 선의 기울기와 접선의 기울기가 같으므로 직선으로 나타난다. 즉, 직선인 선들의 파동은 비분산파(non-dispersive wave)를 나타내며 도파관의 길이방향으로 진동하는 종파(longitudinal wave) 및 원주방향으로 진동하는 비틀림파(torsional wave)가 직선으로 나타남을 확인할 수 있다.

두 번째로 수치 해석을 통한 분산선도를 구하기 위해 전처리 과정(Pre-process)으로 속이 비어있는 실린더형 도파관의 단면을 그림 2와 같이 모델링하였으며 해석에 사용된 모델의 주요 제원은 표 1에 나타내었다.

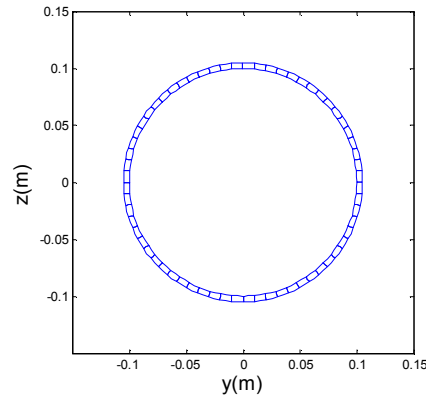


그림 2. 속이 비어있는 실린더형 도파관의 단면 모델.

구분	치수
Diameter of cross-section	0.2 m
Young's modulus	$2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Poisson's ratio	0.3
Density	$7,850 \text{ kg/m}^3$

표 1. 실린더형 도파관 모델의 주요 제원.

모델링한 단면의 노드(node) 및 요소(element) 정보를 가진 데이터 파일을 MATLAB을 이용하여 해석에 필요한 입력 데이터 파일로 만든다. 입력 데이터 파일을 도파관 해석 프로그램(Solver)인 WANDS(WAVE Number Domain Software)를 이용, 계산을 수행하여 앞 절의 식 (2.3)을 풀면 모델의 강성과 관련된 행렬인  $\mathbf{K}_2$ ,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_0$  와 질량 행렬인  $\mathbf{M}$  을 구할 수 있다. 그 후 후처리 과정(Post-process)으로 각 파수에 따른 주파수를 찾아 MATLAB을 이용하여 분산선도를 얻을 수 있다. 이를 그림 3에 나타내었다.

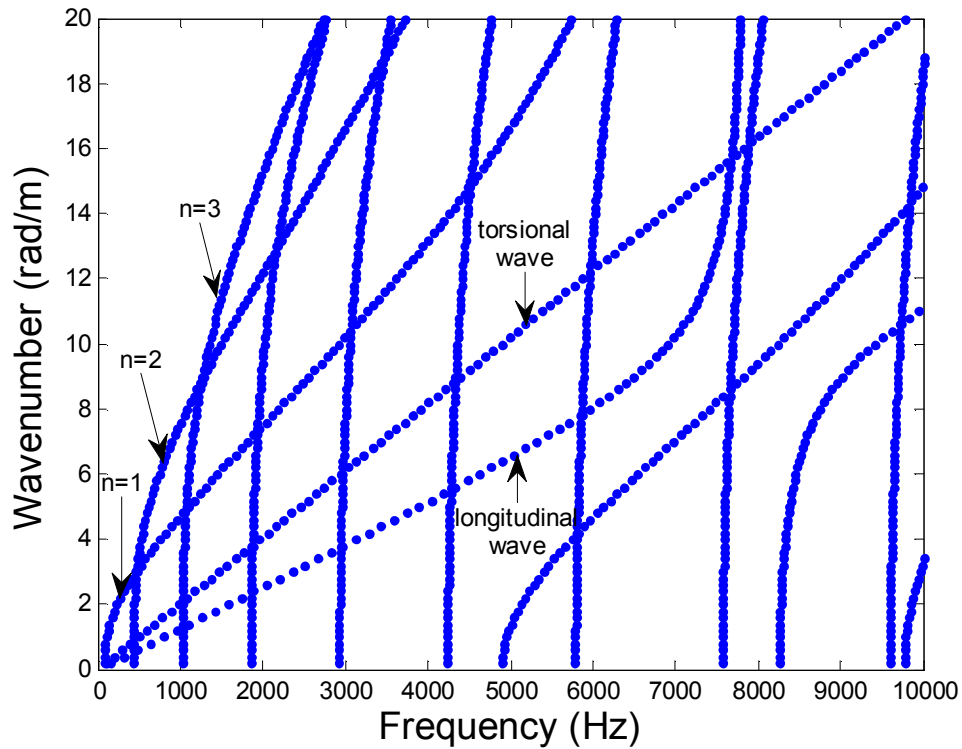


그림 3. 속이 비어있는 실린더형 도파관 모델의 수치해석을 통해 구한 분산선도.

수치해석을 통해 얻은 분산선도 그림 3과 이론해석을 통해 얻은 분산선도 그림 1을 비교해 보았을 때 속이 비어있는 실린더형 도파관 모델을 따라 전파하는 파동의 분산관계는 차이가 없음을 확인할 수 있다. 또한 수치적으로 실린더 단면의 원주방향 변형모드를 그려보면 그림 4와 같이  $n=1$ 은 빔 굽힘 모드(*beam bending mode*),  $n=2$ 는 타원 모드(*oval mode*)이며 주파수가 커질수록 원주방향 변형모드가 증가함을 알 수 있다.

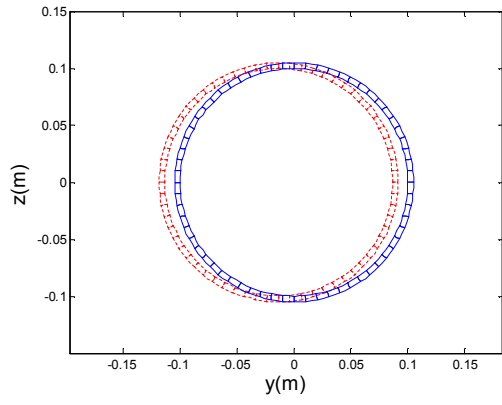


그림 4(a).  $n=1$ .

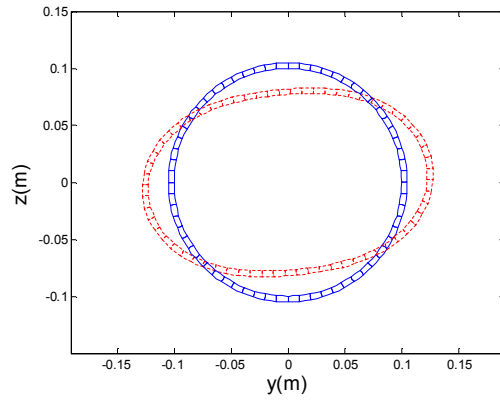


그림 4(b).  $n=2$ .

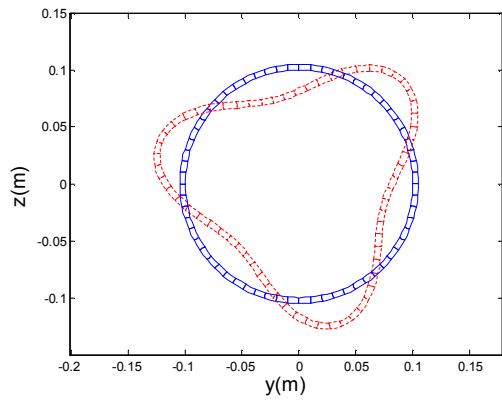


그림 4(c).  $n=3$ .

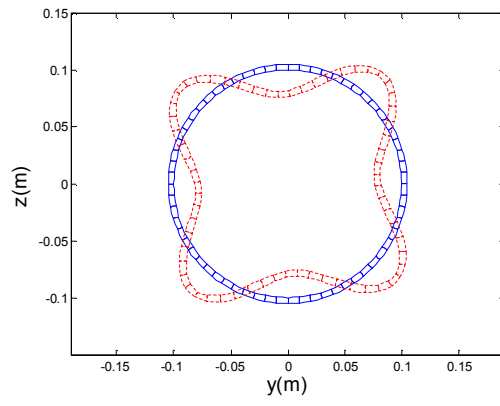


그림 4(d).  $n=4$ .

### 3. 스펙트럴 슈퍼 요소법

#### (Spectral Super Element Method)

앞 절에서 도파관 유한 요소법(WFEM)의 운동방정식 및 분산관계에 대해 알아보았으며 본 절에서는 도파관 유한 요소법(WFEM)과 스펙트럴 유한 요소법(SFEM)을 결합한 스펙트럴 슈퍼 요소법(SSEM)에 대해 이론적으로 알아보려고 한다. SSEM은 참고문헌 [4]에서 제안한 해석법으로 도파관 경계면의 노드압축 없이 FE와 연결할 수 있어 고주파수 대역의 파동 해석에 적합한 방법이다. 참고문헌 [4]에서는 유한 길이 판 구조물에 대해 해석하였으나 본 절에서는 반무한 도파관 구조물에 대해 적용해본다.

#### 3.1 파동해

앞 절에서는 길이방향으로 전파하는 파동만이 관심사였기 때문에 분산관계를 구하기 위해 파수를 대입하고 주파수를 구하는 일반적인 고유치 문제를 풀었지만 SSE 방법에서는 구조물의 변위를 예측하기 위해 근접장 파동(near-field wave)을 포함한 모든 파동해를 구해야 한다. 따라서 식 (2.3)은 주어진 주파수에서의 모든 파수와 모드형상을 구하는 다항 고유치 문제(Polynomial eigenvalue problem)가 된다. 이 식을 풀면 주어진 주파수에서 양의  $x$  방향과 음의  $x$  방향으로 전파 또는 감쇠하는 파동의 파수를 구할 수 있다. 이 파수는 복소수로 표현되며 실수축에 위치한 것은 거리에 따른 감쇠없이 전파하는 파동을, 나머지는 거리에 따라 지수적으로 감쇠하는 파동을 나타낸다.

식 (2.3)을 풀기 위한 연산시간을 줄이고 해의 수치적 안정성을 높이기 위해 다항 고유치 문제를 일반적인 고유치 문제로 바꾸어 해석할 수 있다. 이를 위해 새로운 변수  $\tilde{\Psi}$  를  $\tilde{\Psi} = -j\kappa\tilde{\Phi}$  로 정의하면 식 (2.3)은

$$\begin{bmatrix} -j\kappa\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 - \omega^2\mathbf{M} & -j\kappa\mathbf{K}_2 \\ j\kappa & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Psi} \end{Bmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

이 되며 이를 고유치 문제의 형태로 표현하면,

$$\left( \begin{bmatrix} \omega^2\mathbf{M} - \mathbf{K}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} - (-j\kappa) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Psi} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

이 된다. 이론적으로 양의  $x$  방향과 음의  $x$  방향으로 전파하는 파동의 파수는 복소평면에서 원점을 중심으로 대칭의 위치에 놓인다. 즉,  $\kappa_- = -\kappa_+$  조건을 만족한다.



여기서 하첨자 ‘±’는 파동의 전파 방향을 나타낸다. 양의  $x$ 방향으로 전파하는  $\kappa_+$ 에 대해서는

$$[-\kappa_+^2 \mathbf{K}_2 - j\kappa_+ \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}] \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_+ = 0 \quad (3.3)$$

로 나타낼 수 있으며 음의  $x$ 방향으로 전파하는  $\kappa_-$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[-\kappa_-^2 \mathbf{K}_2 + j\kappa_- \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}] \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_- = 0 \quad (3.4)$$

### 3.2 도파관 변위 함수

유한길이 도파관 구조물에서 변위  $\mathbf{V}(x)$ 는 식 (2.3)에서 얻어지는 파동해의 중첩으로 표현할 수 있다. 예를 들어 길이  $-l_x \leq x \leq l_x$ 인 도파관의 변위벡터는

$$\mathbf{V}(x) = \sum_{m=1}^{2N} a_m \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_m e^{-j\kappa_m x} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(x) \mathbf{a} \quad (3.5)$$

이다.[4] 여기서  $N$ 은 구조물 단면의 자유도 수이고,  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_m$ 는  $\kappa_m$ 에 대한 모드 형상 벡터,  $\boldsymbol{\Phi}$ 는 각 파의 모드 형상을 포함한  $N \times 2N$  행렬,  $\mathbf{a}$ 는  $2N \times 1$ 의 파동 진폭 벡터,  $\mathbf{E}(x)$ 는  $e^{-j\kappa_m x}$  항을 가지고 있는  $2N \times 2N$  행렬이다. 도파관의 경계에서 근접장 파동의 크기 증가로 인해 발생하는 수치오차를 피하기 위해  $\mathbf{E}(x)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.[4]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{mm} &= e^{-j\kappa_m(x-l_x)} \quad \text{for } \text{Im}(\kappa_m) > 0, \\ \mathbf{E}_{mm} &= e^{-j\kappa_m(x+l_x)} \quad \text{for } \text{Im}(\kappa_m) < 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

여기서 미지 변수인 파동의 진폭  $\mathbf{a}$ 는 도파관의 경계인  $x = \pm l_x$ 에서의 변위  $W_1$ 과  $W_2$ 를 이용해 표현하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(-l_x) &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(-l_x) \mathbf{a} = \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{V}(+l_x) &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(+l_x) \mathbf{a} = \mathbf{W}_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

이 된다. 즉,  $\mathbf{a}$ 는

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(-l_x) \\ \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(+l_x) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{W} \quad (3.8)$$

진폭  $\mathbf{a}$ 를 식 (3.7)에 대입하면,

$$\mathbf{V}(x) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(x) \mathbf{A} \mathbf{W} \quad (3.9)$$

이 된다. 따라서 경계에서의 변위  $W$  를 알면 변위  $V(x)$  를 얻을 수 있다.

반무한 도파관 구조물에서는 유한길이 도파관과는 다르게 한 방향으로 전파하는 파동만 존재한다. 따라서 앞에서 구한 파수와 모드 형상 개수의 절반만 이용하여 변위  $V(x)$  를 얻을 수 있다. 양의  $x$  방향으로 무한한 반무한 도파관( $0 \leq x \leq \infty$ ) 에 대한 변위벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}(x) = \sum_{m=1}^N (a_{+,m}) (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{+,m}) e^{-j(\kappa_{+,m})x} = \boldsymbol{\Phi}_+ \mathbf{E}_+(x) \mathbf{a}_+ \quad (3.10)$$

만약  $x=0$  에서 변위가  $\mathbf{W}_0$  라면  $\mathbf{a}_+$  는 식 (3.11)과 같이 표현된다.

$$\mathbf{a}_+ = [\boldsymbol{\Phi}_+ \mathbf{E}_+(0)]^{-1} \mathbf{W}_0 = \mathbf{A}_+ \mathbf{W}_0 \quad (3.11)$$

따라서 다음식이 된다.

$$\mathbf{V}(x) = \boldsymbol{\Phi}_+ \mathbf{E}_+(x) \mathbf{A}_+ \mathbf{W}_0 \quad (3.12)$$

### 3.3 동적 강성 행렬

미지 변수  $\mathbf{W}$  는 도파관의 경계에서 작용하는 힘  $\mathbf{F}$  와 구조물의 동적강성행렬을 이용해 구할 수 있다.  $-l_x \leq x \leq l_x$  인 유한길이 도파관에 대한 동적강성행렬은 식 (3.13)과 같다. [4]

$$\mathbf{D}_S = \mathbf{A}^T (\boldsymbol{\Theta} \circledast \mathbf{E}_1) \mathbf{A} \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \left( \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 (\kappa^m (\boldsymbol{\Phi}^T \epsilon_{mn} \boldsymbol{\Phi}) \kappa^n) - w^2 (\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}) \right) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_{-l_x}^{l_x} \text{diag}(\mathbf{E}(x)) \text{diag}(\mathbf{E}(x))^T dx \quad (3.15)$$

여기서  $\circledast$  는 행, 열이 같은 위치인 값끼리 곱하는 Hadamard 곱이며  $\epsilon_{mn}$  은  $N \times N$  의 변형률 행렬이다. 만약 도파관의 경계에서 외력  $\mathbf{F}$  가 작용한다면 변위  $\mathbf{W}$  는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{D}_S \mathbf{W} = \mathbf{F} \quad (3.16)$$

양의  $x$  방향과 음의  $x$  방향으로 반무한인 길이의 반사파가 없는 도파관 구조물에서는 파수들과 모드 형상들의 절반만 계산에 사용되므로 식 (3.14)와 식 (3.15)는 다음과 같이 표현된다.[9]

$$\boldsymbol{\theta}_{\pm} = \left( \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 (\kappa_{\pm}^m (\Phi_{\pm}^T \boldsymbol{\epsilon}_{mn} \Phi_{\pm}) \kappa_{\pm}^n) - \omega^2 (\Phi_{\pm}^T \mathbf{M} \Phi_{\pm}) \right) \quad (3.17)$$

$$(\mathbf{E}_{I-})_{mn} = \frac{-1}{j(\kappa_m + \kappa_n)} \quad \text{for } -\infty < x \leq 0, \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{E}_{I+})_{mn} = \frac{1}{j(\kappa_m + \kappa_n)} \quad \text{for } 0 \leq x < \infty.$$

그러므로 반무한 도파관에 대한 동적 강성행렬  $\mathbf{D}_{S,\pm}$ 은

$$\mathbf{D}_{S,\pm} = \mathbf{A}_{\pm}^T (\boldsymbol{\theta}_{\pm} \otimes \mathbf{E}_{I\pm}) \mathbf{A}_{\pm} \quad (3.19)$$

으로 정의되며 만약  $x=0$ 에서 작용하는 힘을  $\mathbf{F}_0$ 라 하면

$$\mathbf{W}_0 = (\mathbf{D}_{S,\pm})^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (3.20)$$

이 식을 통해 노드 변위  $\mathbf{W}_0$ 를 찾을 수 있다.

## 4. 스펙트럴 슈퍼 요소/스펙트럴 슈퍼 요소 (SSE/SSE)

앞 절에서 반무한 도파관에 대한 SSE를 정의하였다. 이 절에서는 기존의 SSE/FE 방법을 확대하여, 무한길이 도파관에 국부적 불연속이 있을 때 두 반무한 구간과 국부적 불연속 구간을 모두 SSE로 모델링하여 파동의 전파를 해석하는 방법을 제안하고자 한다.

### 4.1 SSE/FE 연결

본 논문에서 소개하고자 하는 SSE/SSE 방법을 소개하기에 앞서 기존의 SSE/FE 방법을 먼저 살펴보고자 한다. 해석에 사용된 전체 구조물은 그림 5와 같이 세 영역으로 나눌 수 있다. SSE로 모델링되는 두개의 반무한 도파관과 FE로 모델링되는 국부적 불연속을 가지는 부분이다. 이 세 영역들은 경계면에서의 노드가 같다면 쉽게 연결될 수 있으며 이것이 SSE/FE 방법이 가지는 장점 중 하나이다.



그림 5. 국부적 불연속이 있는 도파관의 SSE/FE 모델.

SSE와 FE를 연결하기 위해서는 FE로 모델링되는 부분의 동적 강성 행렬  $D_f$  를 경계면 노드의 자유도로 표현될 수 있도록 변환해야한다. 먼저  $D_f$  는 FE 모델링하여 구한 강성행렬  $K_{fe}$  와 질량행렬  $M_{fe}$  을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$D_f = K_{fe} - \omega^2 M_{fe} \quad (4.1)$$

만약 경계면의 노드에 외력  $F_b$  가 작용한다고 가정하면  $D_f$  를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_b \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{f,bb} & D_{f,bi} \\ D_{f,ib} & D_{f,ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_b \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

하첨자  $b$ 는 경계면에서의 노드 자유도,  $i$ 는 내부 노드의 자유도를 나타낸다. 경계면 노드정보만 가지고 있는 동적 강성 행렬을 구하기 위해 식 (4.2)를 풀어서

$W_i = -\frac{D_{f,ib}}{D_{f,ii}}W_b$  를 대입하면  $F_b = [D_{f,bb} - D_{f,bi}D_{f,ii}^{-1}D_{f,ib}]W_b$  가 되고  $F_b = D_F W_b$  이기 때문에 구하고자 하는 동적 강성 행렬  $D_F$  는 식 (4.3)이 된다.

$$D_F = D_{f,bb} - D_{f,bi}D_{f,ii}^{-1}D_{f,ib} \quad (4.3)$$

그림 5에서 보이는 SSE/FE 모델에서 각 영역의 동적 강성 행렬은 일반적인 FE 에서와 같은 방법으로 결합되어 질 수 있다. 그 결합 행렬은 다음과 같다.

$$D_C = \begin{bmatrix} D_{S,-} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + D_F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{S,+} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

즉,

$$D_C W = F \quad (4.5)$$

이 된다.  $W$  는 경계면에서의 노드 변위이고  $D_{S,-}$ ,  $D_{S,+}$  는 반무한 SSE 모델의 각 각 왼쪽, 오른쪽 영역의 동적 강성 행렬이며  $F$  는 연결된 경계면 노드에 작용하는 외력벡터이다.  $D_C$  와  $F$  가 주어지면 세 영역이 연결되는 두 경계면의 변위  $W$  를 구할 수 있고 최종적으로 식 (3.12)를 이용하여 SSE 영역의 변위  $V(x)$  를 구할 수 있다.

## 4.2 SSE/SSE 연결

이제 SSE/SSE 방법을 살펴보면, 그림 5와 같이 국부적 불연속 구간을 유한요소 대신 스펙트럴 수퍼 요소로 모델링하여 새롭게 적용해보고자 한다. FE 대신 SSE를 사용함으로써 복잡한 FE 모델링을 할 필요 없이 단면만을 모델링하여 두 반무한 SSE와 연결하는 방법이다. 그러므로 모델링 시간뿐만 아니라 해석 시간까지 단축시킬 수 있으므로 기존의 SSE/FE 방법보다 효율적인 방법이라고 할 수 있다.

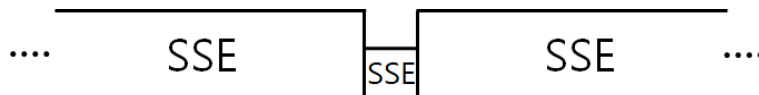


그림 6. 국부적 불연속이 있는 도파관의 SSE/SSE 모델.

앞 절에서는 반무한 SSE 모델에 대해 정의하고 FE와 연결하였으나 이 절에서는 FE 대신 SSE를 연결하는 SSE/SSE 방법을 정의하고자 한다. 먼저 SSE/FE 방법과 마찬가지로 SSE/SSE 방법도 세 영역이 연결되는 경계면에서 동일한 자유도를 가

진다면 노드압축 없이 쉽게 연결될 수 있다. 그러므로 각 영역의 동적 강성 행렬은 식 (4.6)과 같은 방법으로 결합되어 질 수 있다.

$$\mathbf{D}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \overline{\mathbf{D}}_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$\mathbf{D}_1$  은 음의  $x$  방향으로 무한한 SSE의 강성행렬,  $\overline{\mathbf{D}}_2$  는 국부적 불연속구간 SSE의 강성행렬,  $\mathbf{D}_3$  는 양의  $x$  방향으로 무한한 SSE의 강성행렬을 나타낸다. 여기서  $\overline{\mathbf{D}}_2$  는 국부적 불연속구간의 강성행렬  $\mathbf{D}_2$  를 반무한 SSE와 연결하기 위해 재구성 한 것으로 식 (4.7)과 같이 표현된다.

$$\overline{\mathbf{D}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{2,L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{2,R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$\mathbf{D}_{2,L}$  은 음의  $x$  방향 SSE와,  $\mathbf{D}_{2,R}$  은 양의  $x$  방향 SSE와 연결되는 부분의 자유도를 가진 행렬이다. 새로운 동적강성행렬  $\mathbf{D}_\infty$  가 구해지고 외력  $\mathbf{F}$  가 주어진다면 세 영역이 연결되는 두 경계면의 변위 벡터  $\mathbf{W}$  는 식 (4.8)로 부터 구할 수 있으며 식 (3.12)를 이용하여 최종적으로 도파관 구조물의 길이방향 변위  $\mathbf{V}(x)$  를 구할 수 있다.

$$\mathbf{W} = (\mathbf{D}_\infty)^{-1} \mathbf{F} \quad (4.8)$$

### 4.3 입사파 모델링

이제 해석 모델의 반사파와 투과파 특성을 살펴보기 위해서 입사파를 모델링하고자 한다. 입사파를 SSE/SSE 모델에 적용하기 위해 크기는 같고 방향이 반대인 블록힘(blocked force,  $\mathbf{f}_b$ )을 중첩하는 등가 시스템을 이용하였다.[6] 아래의 그림 7(a)에서와 같이 외력이 없는 정상상태(steady-state)에서 입사파, 반사파 및 투과파가 두 개의 반무한 SSE 구간에 존재해야한다. 그림 7(b)으로부터 블록힘을 구할 수 있는데, 블록힘이 발생하는 경계면을  $x=0$  이라 한다면, 이 지점으로부터 양의  $x$ 방향으로 모델의 변위가 0이 되어야 한다.  $x=0$  인 지점에서 입사파에 의해 발생하는 변위가  $\mathbf{W}_0$ 라고 가정한다면 이 값은 모드 형상 벡터가 될 것이다. 이로부터  $-\mathbf{W}_0$ 를 만드는 블록힘을 구할 수 있다. 따라서 블록힘  $\mathbf{f}_b$ 는 두 반무한 SSE 구간을 연결해 얻은 동적강성행렬( $\mathbf{D}_{S,-} + \mathbf{D}_{S,+}$ )로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{f}_b = -(\mathbf{D}_{S,-} + \mathbf{D}_{S,+})\mathbf{W}_0 \quad (4.9)$$

이 블록힘 등가 시스템으로부터 정상상태 입사파를 모델링하였으므로 모델에 적용

되는 입사파에 따라 발생하는 반사파, 투과파 특성을 구할 수 있다. 입사파는 앞 절의 식 (2.3)을 일반적인 고유치문제에 풀어서 구한 전파하는 파동 중에서 모델의 반사파, 투과파 특성을 알고자하는 것을 선택할 수 있다.

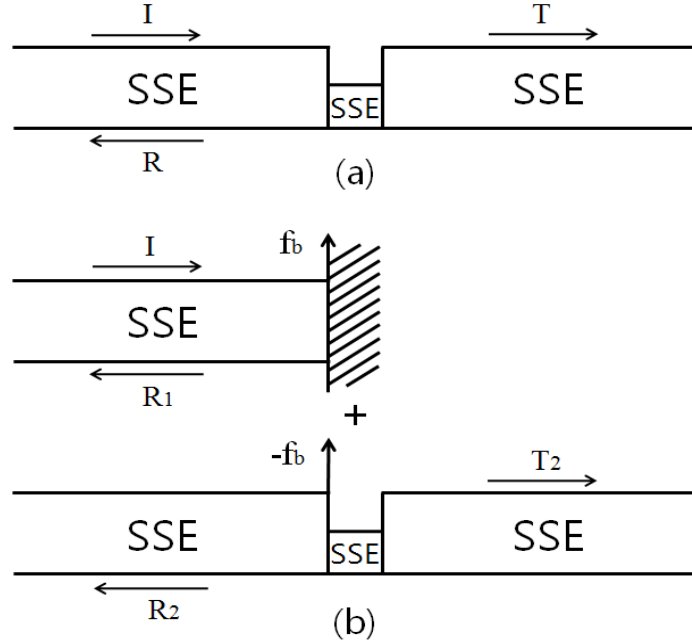


그림 7. 정상상태에서의 입사파를 적용하기 위한 블록힘 등가시스템.

#### 4.4 파워 반사계수 및 파워 투과계수

국부적 불연속이 없는 균일한 도파관 모델에 파동이 입사되면 입사파에 의해 전달되는 파워는 반사 없이 모두 투과될 것이다. 즉, 입사파에 의해 발생하는 모든 반사, 투과 파동은 다음 식을 만족하여야 한다.

$$\sum_j r_{ij} = 0, \quad \sum_j t_{ij} = 1 \quad (4.10)$$

여기서  $r$  은 파워 반사계수,  $t$  는 파워 투과계수를 나타내며 하첨자  $i$  는 입사되는 파동, 하첨자  $j$  는 반사 및 투과되는 파동을 나타낸다. 파워 반사 및 투과계수는 다음과 같이 정의된다.

$$r_{ij} = \frac{\Pi_{ref}^j}{\Pi_{inc}^i}, \quad t_{ij} = \frac{\Pi_{trn}^j}{\Pi_{inc}^i} \quad (4.11)$$

$\Pi_{inc}^i$ ,  $\Pi_{ref}^j$ ,  $\Pi_{trn}^j$  는 각각 입사파  $i$  의 파워, 반사되는 파동  $j$  의 파워, 투과되는 파동  $j$  의 파워를 나타내며 변위 벡터를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
\Pi_{inc}^i &= \frac{1}{2N} \rho A \omega^2 c_{g,inc}^i \sum_A |\mathbf{V}(x)_{inc}^i|^2, \\
\Pi_{ref}^j &= \frac{1}{2N} \rho A \omega^2 c_{g,ref}^j \sum_A |\mathbf{V}(x)_{ref}^j|^2, \\
\Pi_{trn}^j &= \frac{1}{2N} \rho A \omega^2 c_{g,trn}^j \sum_A |\mathbf{V}(x)_{trn}^j|^2
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$\rho A$  는 단면의 단위 길이당 질량,  $\sum_A$  는 단면에 대한 합,  $c_g$  는 군속도(group velocity)를 의미한다. 본 논문에서는 감쇠(damping)를 고려하지 않기 때문에 파워 보존법칙인 입사된 파워는 모두 반사, 투과되는 조건을 만족하기위해 근접장(near-field wave) 부근을 제외한 모든 구간에서 파워 반사와 파워 투과 계수의 합은 1이 되어야 한다.

또한 국부적인 불연속이 있는 경우, 도파관을 따라 전파하던 파동이 국부적 불연속을 만나게 되면 파동의 일부는 반사되고 나머지는 투과될 것이다. 즉, 다음 식을 만족한다.

$$\sum_j r_{ij} + \sum_j t_{ij} = 1 \tag{4.13}$$



## 5. SSE/SSE 방법의 적용 예

SSE/SSE 방법의 검증을 위해 사용한 모델은 단면이 직사각형 모양이고 길이방향으로 무한한 단순 보 형태이며 모델의 가운데에 국부적 불연속 구간이 있는 모델이다. 그림 6과 같이 국부적 불연속 구간을 SSE, 나머지 두 반무한 구간도 SSE 방법으로 모델링하여 세 구간을 연결하여 수치적으로 해석하였다.

먼저 SSE 방법 자체를 검증하기 위해 국부적 불연속이 없는 균일한 무한길이 도파관 모델을 두 반무한 SSE의 합으로 연결한 모델의 오차를 살펴보았다. 그 후 국부적 불연속 구간을 SSE로 모델링했을 때의 파워 반사계수, 투과계수를 살펴보고 파워보존법칙을 이용해 국부적 불연속 구간을 FE로 모델링했을 때와의 오차를 비교해 보았다.

### 5.1 해석 모델

본 논문에서 사용한 모델은 단면이 좌우대칭인 단순 사각 단면을 가진 모델이다. 그림 8과 같은 단면을 가진 반무한 SSE 모델의 단면 노드는 79개, 총 자유도는 237개이며 그림 9의 국부적 불연속 구간의 SSE 모델 단면 노드는 45개, 총 자유도는 135개 이다. 재질은 강철 (steel)로써 모델의 제원을 표 2에 나타내었다.

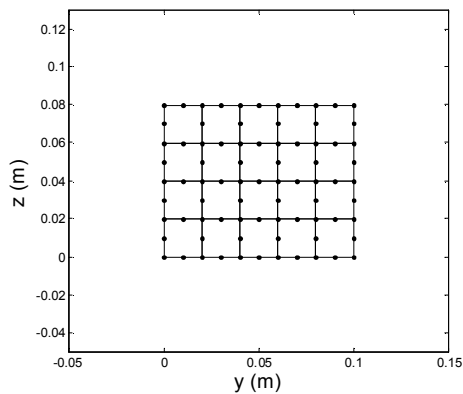


그림 8. 반무한 구간의 단면 모델.

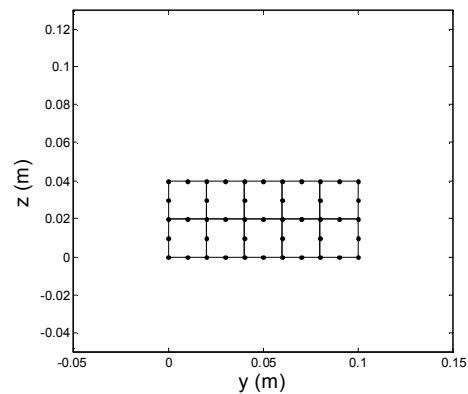


그림 9. 국부적 불연속 구간의 단면 모델.

구분	치수
Width of cross-section	0.1 m
Height of cross-section of semi-infinite SSE	0.08 m
Height of cross-section of finite SSE	0.04 m
Young's modulus	$2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Poisson's ratio	0.3
Density	$7,850 \text{ kg/m}^3$

표 2. 국부적 불연속 구간이 있는 도파관 모델의 주요 제원.

이 도파관 모델을 따라 전파하는 파동을 파악하기 위해 해석 모델 단면의 분산선도를 그림 10과 그림 11에 나타내었다. 그림 10은 반무한 구간의 분산선도이며 그림 11은 국부적 불연속 구간의 분산선도이다. 그림에서 보는 바와 같이 0~2000Hz 사이에서 총 4개의 선이 존재하는 것을 알 수 있는데 각 선들은 이 모델을 따라 전파하는 파동을 나타낸다. 수치적으로 각 파동의 변형모드를 그림 12에 나타내었고 파수가 1일 때 파동 1은 종파 (longitudinal wave), 파동 2는 비틀림파 (torsional wave), 파동 3은 수평방향 굽힘파 (lateral bending wave), 그리고 파동 4는 수직방향 굽힘파 (vertical bending wave)임을 알 수 있다.

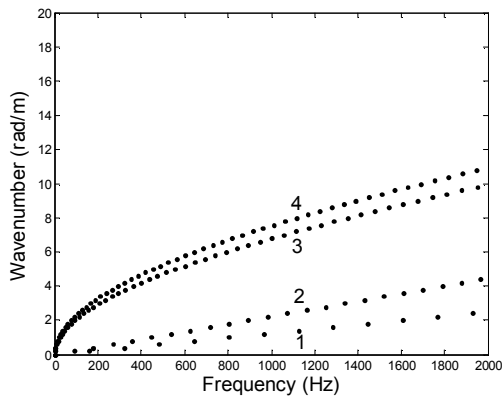


그림 10. 반무한 구간 모델 단면의 분산선도.

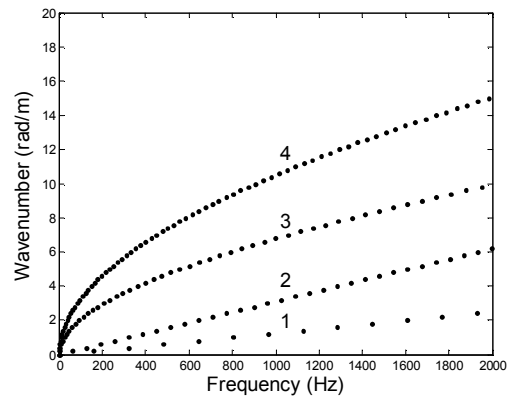


그림 11. 국부적 불연속 구간 모델 단면의 분산선도.

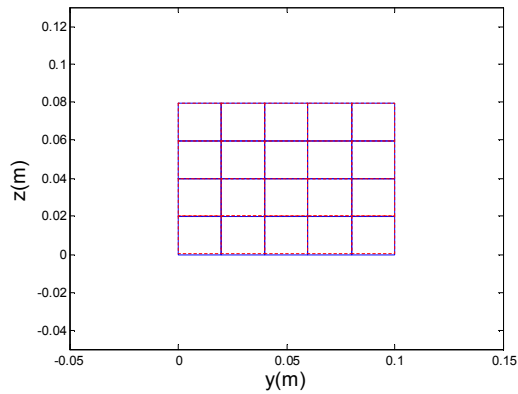


그림 12(a). 파동 1.

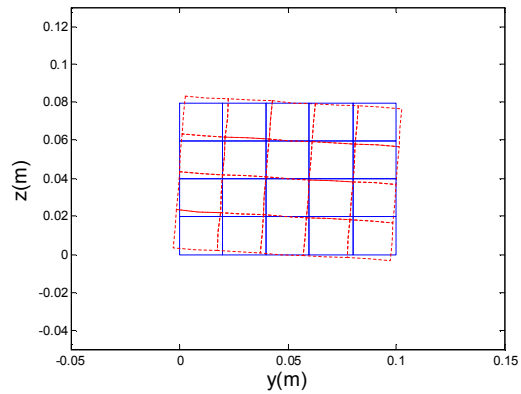


그림 12(b). 파동 2.

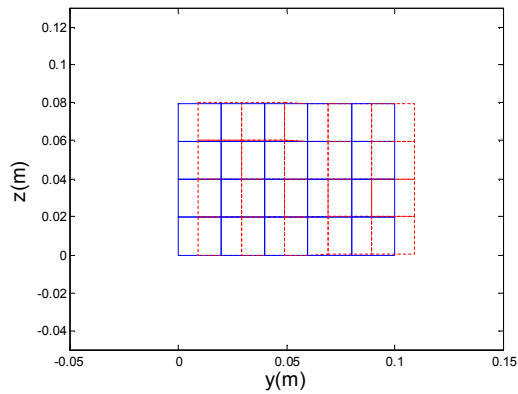


그림 12(c). 파동 3.

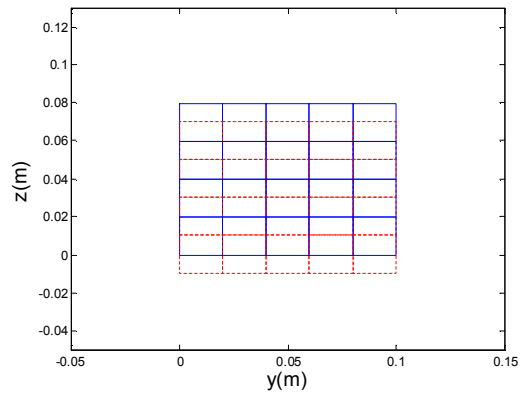


그림 12(d). 파동 4.

## 5.2 오차 해석

먼저 SSE/SSE 방법 자체의 검증을 위해 그림 13과 같이 불연속 구간이 없는 균일한 도파관 모델에 대해 파워 반사, 투과계수를 구하여 입사된 파워가 보존되는지 확인하였다. 국부적 불연속이 없는 균일한 도파관 모델에 파동이 입사되면 입사파에 의해 전달되는 파워는 반사 없이 모두 투과될 것이다. 즉, 입사파  $i$ 에 의해 발생하는 모든 반사, 투과하는 파동은 식 (4.10)을 만족하여야 한다.



그림 13. 불연속 구간이 없는 도파관의 SSE/SSE 모델.

균일한 SSE/SSE 모델에 대해 파동 1, 2, 3, 4가 입사되었을 때 파워 반사계수

및 투과계수를 살펴보았다. 그림 14에서 파워 반사계수를 보면 모든 입사 파동  $i$ 에 따라 반사되는 파동  $j$ 를 모두 더한 결과 0~2000 Hz 구간에서  $10^{-22} \sim 10^{-28}$  정도의 값을 가지며 고수파수 대역으로 갈수록 값이 작아지는 것을 알 수 있다. 즉, 식 (4.10)에서와 같이 0이 되어야하는 반사계수가 그 값 자체로 오차를 나타내며 거의 없다고 볼 수 있을 정도로 아주 미미한 것을 확인할 수 있다. 그림 15의 파워 투과계수 오차를 보면 파워 투과계수에서 1을 뺀 값이 입사파의 종류에 관계없이 약  $10^{-8} \sim 10^{-12}$  정도의 매우 작은 수준임을 알 수 있으며 또한 아주 미미한 것을 확인할 수 있다. 이 오차 수준들을 볼 때 SSE/SSE 방법이 신뢰성이 있는 것으로 판단되며 다음으로 국부적 불연속이 있는 경우 SSE/SSE 방법이 가지는 오차에 대해 살펴보았다.

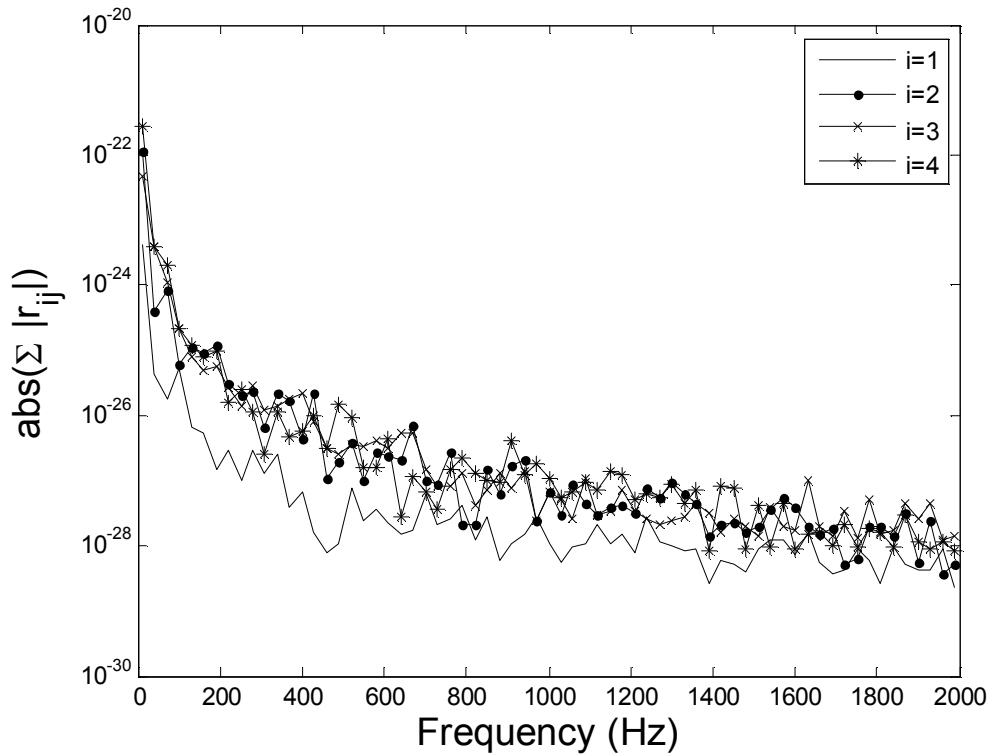


그림 14. 균일한 SSE/SSE 모델의 파워 반사계수.

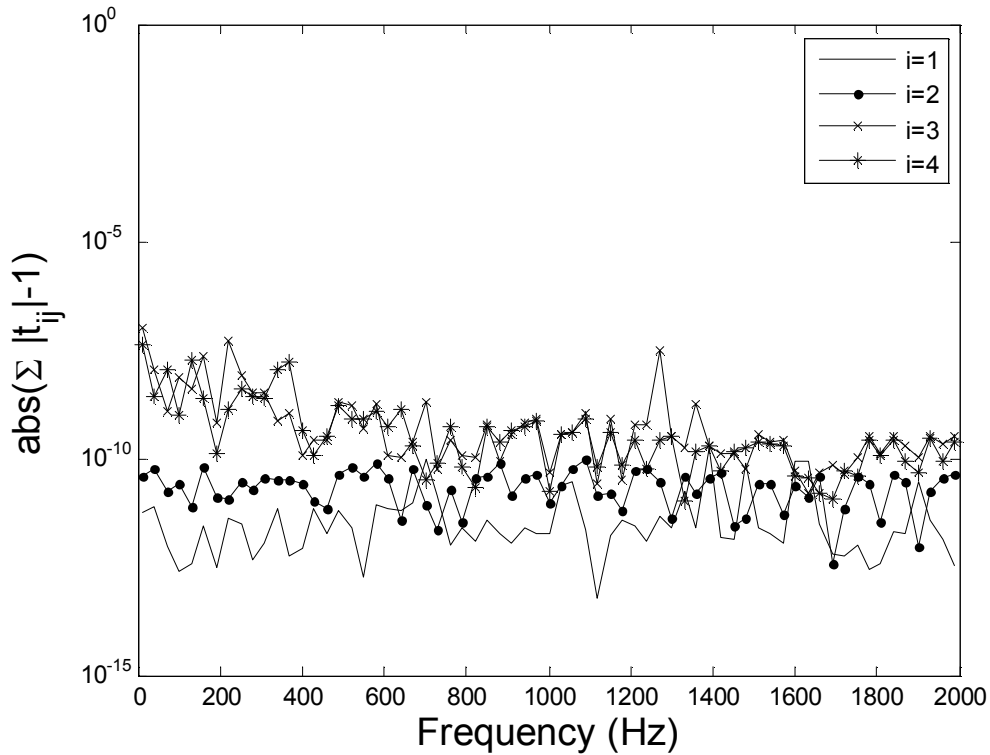


그림 15. 균일한 SSE/SSE 모델의 파워 투과계수 오차.

그림 6의 도파관 모델에 파동 1, 2, 3, 4가 각각 입사되었을 때 파워 반사 및 투과계수를 구하여 그 특성을 확인하였다. 균일한 모델과 다르게 국부적 불연속을 가지기 때문에 모든 입사파가 투과되는 것이 아니라 일부는 반사, 나머지는 투과될 것이다. 먼저 그림 16에 나타낸 각 파동의 파워 반사계수를 보면, 파동 4가 입사되었을 때 파워 반사계수는 약  $10^{-1}$ 인 것을 알 수 있으며 고주파수 대역으로 갈수록 많이 반사되는 경향이 있다. 이 값은 그림 17의 파동 4가 입사되었을 때의 파워 투과계수와 합하였을 때 거의 1이 된다는 것을 확인할 수 있다. 나머지 파동 1, 2, 3이 입사파일 때도 마찬가지로 파워 반사계수와 파워 투과계수를 합했을 때 대략 1인 것을 알 수 있으며 그림에서 보는 바와 같이 파동 4가 가장 많이 반사되는 대신 가장 적게 투과되는 것을 알 수 있다.

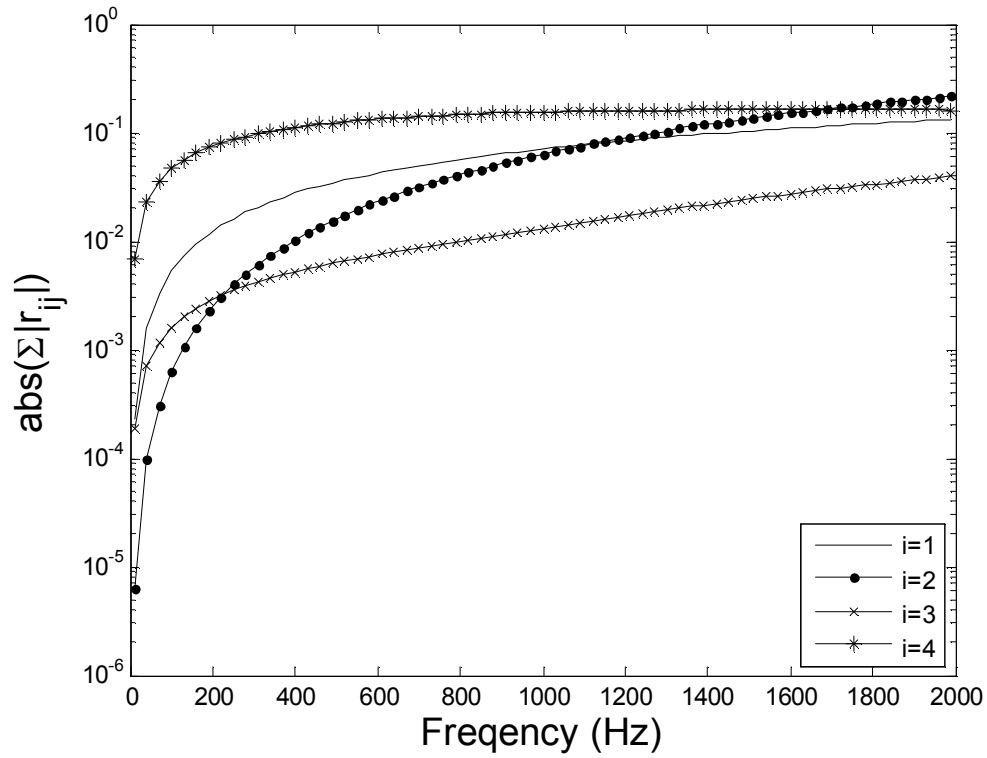


그림 16. 국부적 불연속이 있는 SSE/SSE 모델의 파워 반사계수.

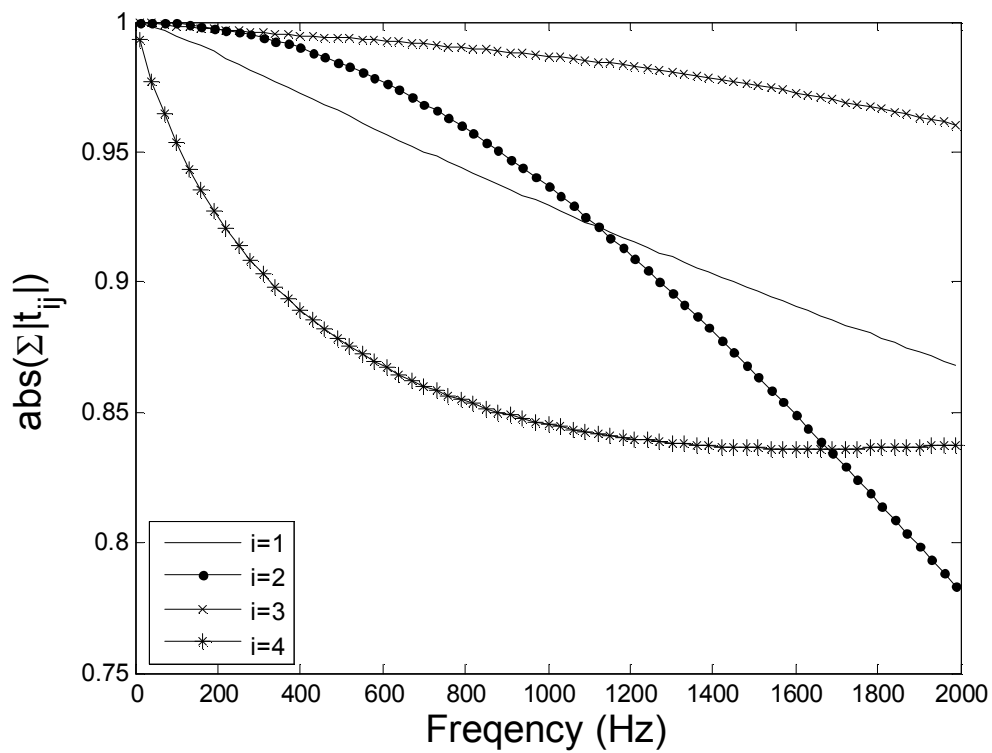


그림 17. 국부적 불연속이 있는 SSE/SSE 모델의 파워 투과계수.

다음으로 이 파워 반사계수 및 투과계수의 오차를 살펴보기 위해서 식 (4.13)의 파워보존법칙을 만족하는지 알아보았다. 비교를 위해 기존의 방법인 SSE/FE 모델의 수치 오차를 먼저 살펴보면, 그림 18의 파워 반사계수와 파워 투과계수를 합한 값에 1을 뺀 오차가  $10^{-6} \sim 10^{-11}$  정도의 낮은 수준임을 알 수 있으며 고주파수 영역으로 갈수록 오차가 커지는 것을 확인할 수 있다. 국부적 불연속구간을 FE 대신 SSE로 모델링한 경우의 오차는 그림 19에 나타내었다. 이것 또한 오차가  $10^{-6} \sim 10^{-11}$  수준으로 SSE/FE 모델과 비교했을 때 육안으로는 확인할 수 없을 정도로 흡사하다고 할 수 있다. 이로써 이 오차는 국부적 불연속을 FE, SSE 어떤 것으로 모델링하든 상관없이 유사한 것으로 보아 반무한 구간의 SSE 방법 자체의 오차라고 할 수 있으며, 국부적 불연속 구간을 SSE로 모델링하는 방법이 신뢰성이 있다는 것을 알 수 있다. 그러므로 모델링 및 연산에 많은 시간이 소요되는 FE 모델링보다 단면만을 모델링하여 해석하는 SSE 방법이 더 효율적이라고 판단된다.

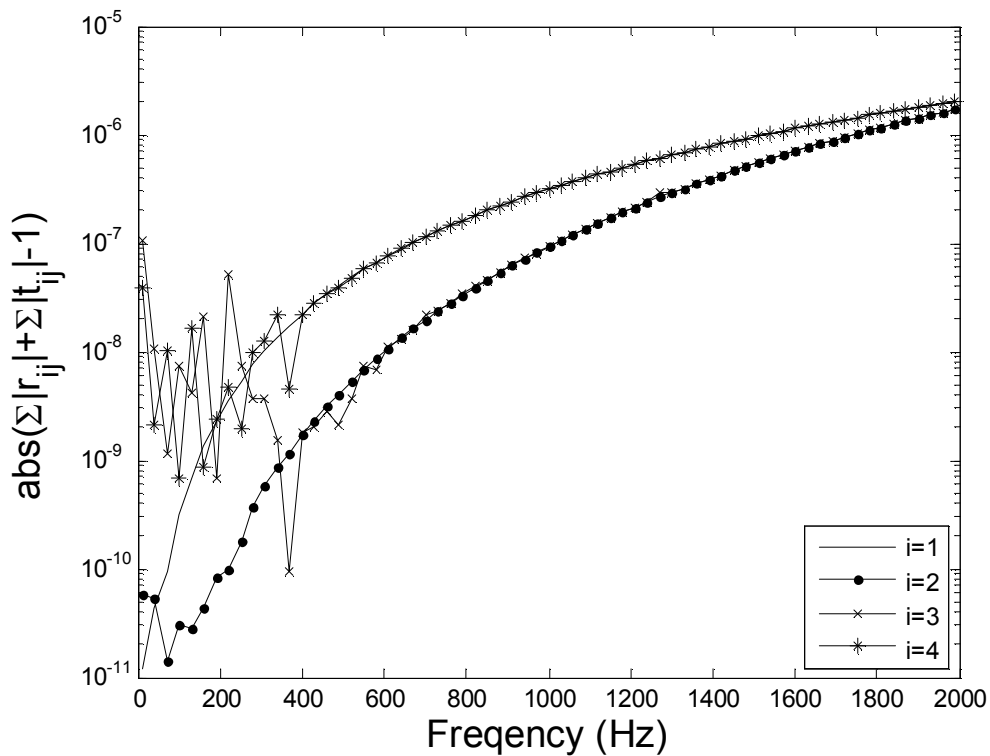


그림 18. 국부적 불연속이 있는 SSE/FE 모델의 수치 오차.

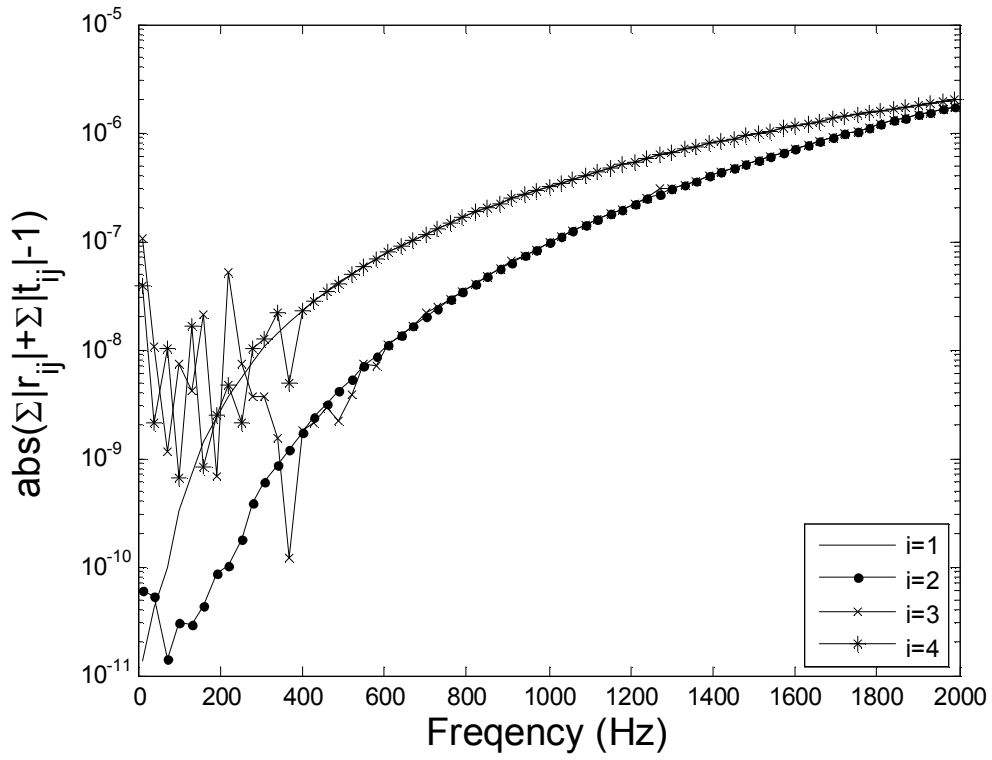


그림 19. 국부적 불연속이 있는 SSE/SSE 모델의 수치 오차.



## 6. 결론

본 논문에서는 국부적 불연속이 있는 도파관 구조물에 대하여 파동의 반사 및 투과 특성을 해석하는 SSE/SSE 방법을 제시하였다. SSE/SSE 방법은 국부적 불연속 구간과 나머지 반 무한 구간들을 스펙트럴 수퍼 요소(SSE)를 이용해 결합하는 것으로, 기존의 국부적 불연속 구간을 FE 모델링하는 SSE/FE 방법과 비교해 보았다. SSE/SSE 방법은 모델의 단면만을 모델링하여 해석하기 때문에 SSE/FE 방법보다 모델링이 간편하며, 해석 데이터의 양이 적어 해석 시간도 훨씬 적게 걸리므로 효율적이라고 할 수 있다. 이 방법의 유용성을 확인하기 위해 파워보존법칙을 이용하여 파워 반사계수 및 투과계수의 오차를 수치적으로 추정해본 결과,  $10^{-7} \sim 10^{-11}$  수준으로 기존의 SSE/FE 방법과 같이 매우 작았으며 SSE/FE 방법을 대체할 수 있는 좋은 해석 방법이라 생각된다.

향후 과제로는 실린더형 도파관, 복잡한 단면을 가진 도파관 등 여러 모델에 대해 적용해보고 실험을 통한 결과와 비교 해 봐야 할 것이다.

## 참고문헌

1. X. Sheng, C. J. C. Jones and D. J. Thompson, "Modelling ground vibration from rail traffic using the discrete wavenumber finite and boundary element methods", ISVR Technical Memorandum No 899, p.1-13, Nov. 2002
2. Ivan Bartoli, Alessandro Marzani, Francesco Lanza di Scalea, Erasmo Viola, "Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section", Journal of Sound and Vibration, vol. 295, p.685-707, 2006
3. C.-M. Nilsson, S. Finnvenden, "Waves in thin-walled fluid-filled ducts with arbitrary cross-sections", Journal of Sound and Vibration, vol. 310, p.58-76, 2008.
4. F. Birgersson, S. Finnvenden, C.-M. Nilsson, "A spectral super element for modelling of plate vibration. Part 1: general theory" Journal of Sound and Vibration, vol. 287, p.297-314, 2005
5. S. Gopalakrishnan, J. F. Doyle, "Spectral super-elements for wave propagation in structures with local non-uniformities", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 121, p.77-90, 1995
6. S. P. Shone, B. R. Mace, T. P. Waters, "Reflection of waves from cracks in beams", Institute of Sound & Vibration Research, 2004
7. C. R. Fuller, F. J. Fahy, "Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid", Institute of Sound & Vibration Research, 1981
8. C.-M. Nilsson, C. J. C. Jones, D. J. Thompson, J. Ryue, "A waveguide finite element and boundary element approach to calculating the sound radiated by railway and tram rails", Journal of Sound and Vibration, vol. 321, p.813-836, 2009
9. J. Ryue, D. J. Thompson, P. R. White, D. R. Thompson, "Wave reflection and transmission due to defects in infinite structural waveguides at high frequencies", Journal of Sound and Vibration, 2010
10. C. A. F. de Jong, "Analysis of pulsations and vibrations in fluid-filled pipe systems", TNO Institute of Applied Physics, 1994