creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

[UCI]I804:48009-200000218463

공학박사학위논문

삼각형 패널상에 선형적으로 분포된 다이폴 강도를 갖는 패널법의 정식화

(Formulation of the panel method with linearly distributed dipole strength on triangular panels)

울산대학교 대학원

조선해양공학부

오 진 안

삼각형 패널상에 선형적으로 분포된 다이폴 강도를 갖는 패널법의 정식화

지도교수 정 노 택

이 논문을 공학박사 학위 논문으로 제출함

2019년 7월

울산대학교 대학원

조선해양공학부

오 진 안

오진안의 공학박사 학위논문을 인준함

심사위원 신 동 목 (인)

심사위원 안 형 택 (인)

심사위원 정 노 택 (인)

심사위원 서 정 천 (인)

심사위원 이 진 태 (인)

울산대학교 대학원

2019년 7월

국문 요약

유체중에 작동하고 있는 프로펠러에 대한 포텐셜 유동을 해석하기 위한 패널법은 Green 정리에 기초한 포텐셜-기저 패널법이 사용되고 있다. 현재까지 사용된 패널법은 저차 패널법으로 그 특징에 의해 오차를 포함 하고 있다. 저차 패널법의 경우 패널을 사각형으로 구성하게 된다. 사각형으로 구성된 패널의 경우 프로펠러와 같이 곡이 심한 형상을 표현함에 있어서 그 정도가 낮게 된다. 또, 사각형 패널은 한 평면상에 존재하지 않으므로 영향계수 계산 시 한 평면상에 투영시켜 계산을 수행한다. 이로 인해 원 평면에서 계산하는 것과 오차가 발생하게 된다. 또 다른 특징으로 패널상에 특이점의 강도가 균일하다고 가정하고 문제를 풀게 된다. 패널상에 강도가 균일하게 되면 패널 간 특이점 강도의 단차가 발생하여 오차의 원인이 된다.

본 논문에서는 상기 언급한 저차 패널법의 특징을 개선하여 저차 패널법의 정도를 높이고자 하였다. 우선 사각형 패널을 삼각형 패널로 바꾸어 곡이 심한 물체를 표현하는 정도를 높이고자 하였다. 삼각형 패널은 동일 반경 상 아래와 위에 엇갈리게 배치하여 Green 정리를 만족시킬 수 있는 밀폐된 형상을 구현하였다. 또, 삼각형 패널의 경우 한 평면상에 존재하고 있어 사각형 패널과 같이 한 평면상에 투영시킴으로 인한 오차를 줄일 수 있다. 이어서, 패널 상에 특이점의 강도를 선형적으로 분포시켜 패널 간 특이점 강도의 단차를 없애고자 하였다. 삼각형 패널의 각 꼭짓점에 특이점을 분포시켜 특이점의 강도가 연속적으로 분포 할 수 있도록 하였다.

3차원 물체에 대한 정식화에 앞서 2차원 물체에 대해 정식화를 진행하여 정식화 과정의 문제점과 기존 균일강도 패널법 대비 정도의 향상 여부를 확인하였다. 이어서, 3차원 물체에 대한 정식화를 진행하고 정식화의 결과에 대해 검증 하였다. 검증은 양력이 없는 원형 날개와 세장비가 큰 날개 마지막으로 양력이 존재하는 원형날개에 대해 진행 하였다. 검증 결과 정식화가 정상적으로 이루어 졌음을 확인 할 수 있었다.

목 차

국문 요약 ····· i

그림 목록 ····· ii

표 목록 ····· vi

1. 서언 ····· 1

2. 패널법의 기본 ····· 4

2.1 기본 가정 ····· 4
2.2 지배방정식과 경계 조건 ····· 4
2.3 적분방정식 ····· 6

3. 경계치 문제의 정식화 ····· 8

3.1 삼각형 패널의 배치 ····· 8
3.2 특이점 분포의 이산화 ····· 10
3.3 입체각 ····· 16
3.4 Kutta 조건 ····· 21
3.5 속도와 압력의 계산 ····· 26

4. 2차원 날개 단면에 대한 적용 ····· 31

4.1 2차원 구분 선형 패널법의 정식화 ····· 31
4.2 균일 강도와 구분 선형 강도 패널법의 비교 ····· 35

5. 3차원 양력체 계산 결과 ····· 44

5.1 양력이 없는 원형 날개 ····· 44
5.1.1. 구 주변의 유동 ····· 44
5.1.2. 타원체 주변의 유동 ····· 53

5.2 세장비가 큰 날개 ····· 62
5.3 양력이 존재하는 원형 날개 ····· 73

6. 결론 ····· 78

참고문헌 ····· 79

부록 ····· 82

부록 A 영향 계수의 유도 ····· 82

A. 1 특이점의 강도가 균일하게 분포한 경우 ····· 83
A. 2 특이점의 강도가 선형적으로 분포한 경우 ····· 84

부록 B 영향 계수의 확인 ····· 86

부록 C 해석해 ····· 90

C. 1 원의 해석해 ····· 90
C. 2 Karman-Trefftz 변환 ····· 91
C. 3 양력이 없는 3차원 원형 날개에 대한 해석해 ···· 92

Abstract ····· 95

그림 목록

Fig. 2-1 Notation for a general body for the application of Green's theorem
Fig. 3-1 Panel arrangement of a ellipsoid viewed from upstream (N_{ct}=40, M_r=20)
Fig. 3-2 Description of constant strength panels
Fig. 3-3 Description of piecewise linear strength panels
Fig. 3-4 Linear dipole strength distribution on a triangular panel
Fig. 3-5 Bilinear dipole strength distribution on a wake panel
Fig. 3-6 Relocation of the trailing edge control points
Fig. 3-7 Characteristics of solid angle(A.van oosterom and J.strackee)
Fig. 3-8 Self-induction coefficient calculated by solid angle
Fig. 3-9 Increment of epsilon for the verification of solid angle calculation
Fig. 3-10 Chordwise $-C_p$ distribution by the pressure Kutta condition for the circular wing(NACA 0005, N_c=40, M_r=20, α=5.73°, r/R=0.89101)
Fig. 3-11 Radial $\triangle C_p$ distribution by the pressure Kutta condition for the circular wing(NACA 0005, N_c=40, M_r=20, α=5.73°)
Fig. 3-12 Calculation of the tangential vector passing 3 points
Fig. 3-13 Local coordinate system for the calculation of tangential vector at nodal points
Fig. 3-14 Tangential vector at local coordinate system
Fig. 3-15 Projection of the velocity vector to the local coordinate system
Fig. 4-1 DR dipole influence coefficient
Fig. 4-2 DL dipole influence coefficient
Fig. 4-3 Self-induction for a linear dipole strength panel
Fig. 4-4 Notation for Kutta condition at the trailing edge
Fig. 4-5 Geometry of a circle
Fig. 4-6 Geometry comparison of KT sections with camber and without camber

Fig. 4-7 $-C_p$ distribution for a circle at $\alpha = 0^\circ$
Fig. 4-8 $-C_p$ distribution for the KT section with camber at $\alpha = 0^\circ$
Fig. 4-9 $-C_p$ distribution for a circle at $\alpha = 90^\circ$
Fig. 4-10 $-C_p$ distribution for the KT section with camber at $\alpha = 90^\circ$
Fig. 5-1 Local u-v coordinate system
Fig. 5-2 Panel arrangement for a sphere(N_c=20, M_r=10, a=b=c=1)
Fig. 5-3 Chordwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-4 Spanwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-5 Chordwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-6 Spanwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-7 Chordwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-8 Spanwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-9 Chordwise $-C_p$ distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-10 Geometry representation of a Ellipsoid(N_c=20, M_r=10, a=b=1, c=0.1)
Fig. 5-11 Chordwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-12 Spanwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-13 Chordwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-14 Spanwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-15 Chordwise v-direction velocity distribution compared

with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-16 Spanwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-17 Chordwise $-C_p$ distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-18 Leading edge representation as the number of panels increases
Fig. 5-19 Potential distribution near the leading edge as the number of panels increases
Fig. 5-20 High aspect ratio wing with NACA 0010 and wake surface(N_c=60, M_r=20, aspect ratio=10, α=10°)
Fig. 5-21 High aspect ratio wing with NACA 66 a=0.8(t/c=0.1, f/c=0.04) and wake surface(N_c=60, M_r=20, aspect ratio=10, α=0°)
Fig. 5-22 Chord-direction convergence test for the high aspect ratio wing(NACA 0010, α=10°)
Fig. 5-23 Span-direction convergence test for the high aspect ratio wing(NACA 0010, α=10°)
Fig. 5-24 Potential distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-25 $-C_p$ distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-26 Potential distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=10°)
Fig. 5-27 $-C_p$ distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=10°)
Fig. 5-28 Potential distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 66 a=0.8 t/c=0.1, f/c=0.04, N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-29 $-C_p$ distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 66 a=0.8 t/c=0.1, f/c=0.04, N_c=60, M_r=20, α=0°)
Fig. 5-30 Effect of the chord-direction number of panels on the circulation distribution of the circular wing(NACA 0001, α=5.73°)
Fig. 5-31 Effect of the span-direction number of panels on the

circulation distribution of the circular wing(NACA 0001, α=5.73°)
Fig. 5-32 Effect of the pressure Kutta condition on the span-direction $\triangle C_p$ of the circular wing(NACA 0001, α=5.73°)
Fig. B1 Equivalent representation of numerous constant strength panels for a linear strength panel
Fig. B2 Arrangement of panel and control points, with right side dipole strength
Fig. B3 Arrangement of panel and control points with left side dipole strength

표 목록

Table 3-1 Decrease of $\epsilon$for the calculation of influence coefficient($\epsilon = 1.0 \times 10^{-7}$)
Table 3-2 Results of influence coefficient calculation as ϵ decrease
Table 4-1 Results of the $-C_p$ maximum values by various panel methods at $\alpha = 0^\circ$
Table 4-2 Results of the $-C_p$ maximum values by various panel methods at $\alpha = 90^\circ$
Table 4-3 Results of the Γ values by various panel methods at $\alpha = 90^\circ$
Table B1 Comparison of dipole influence coefficient by constant strength and linear strength panels with right side dipole strength
Table B2 Comparison of dipole influence coefficient by constant strength and linear strength panels with left side dipole strength

1. 서언

유체중에서 운동하고 있는 프로펠러에 대한 포텐셜 유동을 해석하기 위한 패널법(panel method)은 Green 정리(Green theorem)에 기초한 포텐셜-기저 패널법을 Lee[12], Hoshino[4]에 의해서 정상 상태의 문제에 대해 최초로 적용이 이루어 졌다. 이후 포텐셜 기저 패널법은 Hsin[5], 문일성 등[23], 김영기[22]에 의해 각각 비정상 상태 중에 작동하는 프로펠러의 성능 추정, 비정상 공동 프로펠러의 성능 해석을 수행하는 단계까지 발전되었다. 그러나 상기의 포텐셜을 기저로 한 저차 패널법은 각 패널에 있어 포텐셜이 일정하다고 가정하고 있다. 또 저차 패널법의 경우 사각형 패널을 사용하게 되는데, 이는 프로펠러와 같이 곡이 심한 물체를 표현할 때는 패널이 한 평면상에 존재 하지 않게 된다. 이를 해결하기 위해 평균 평면상에 투영시켜 계산하게 되는데, 이는 물체의 원 평면상에서 계산하는 것과의 오차를 발생시키게 된다. 이러한 수치적 오류는 양력을 발생하는 물체의 앞날, 뒷날과 날개끝단 근처에서의 정확도를 낮추는 결과를 가져온다. 이러한 저차 패널법의 특성을 개선하기 위해 많은 시도들이 있었다. Newman[9]은 4변을 갖는 패널상에 특이점 강도의 분포가 다차원일 경우에 유기 포텐셜을 수학적으로 표현한 바 있다. Suh 등[8]은 패널상에 특이점 강도가 쌍선형적(bilinear)으로 분포할 경우에 대해 계산을 수행한 바 있다. 하지만 삼각형 패널을 이용한 계산은 양력이 없는 구에 대해서만 진행하고 양력이 있는 원형 날개에 대해서는 사각형 패널을 이용하여 계산을 진행하였다. 이창섭과 서정천[30]은 사각형 패널이 한 평면상에 존재 하지 않아 평균 평면상에 투영하여 계산함으로 인한 오차를 줄이고자 패널의 원 평면상에서 유기되는 포텐셜을 패널의 내각을 이용해 구하고자 시도 하였다. 하지만 제시된 방법은 패널상에 특이점의 강도가 균일 하게 분포하고 있다고 가정하고 있다. 특이점 강도의 분포를 패널 내부에서의 함수의 변화를 고차의 다항식으로 표현하는 고차패널법으로 저차 패널법의 문제를 해결하고자 하는 시도가 있었고, 고차패널법은 Brebbia 등[2]에 잘 소개되어 있다. 백광준 등[27]은 정상 유동중의 프로펠러 해석에 적용한바 있고, 홍사영, 최항순[33]에 의해 선체 주위의 유동 해석에 적용된 바 있다. 그리고 박일룡, 전호환[26]이 수중익에 대한 3차원 조파저항문제를 해석한 바 있다. 또 다른 방법으로 B-spline을 이용하여 저차패널법을 고차패널법으로 확장하고자 하였다.

B-spline 기저함수(Piegl and Tiller[15])를 사용하면 기저함수의 미분을 정확하게 구할 수 있기 때문이다. B-spline을 기저로하는 고차패널법은 Hsin 등[6]이 2차원 물체 주위의 유동을 해석함으로써 처음으로 소개되었고, 조충호[31]는 2차원 문제에 대해 B-spline을 이용하여 고차패널법에 대한 수치 실험을 수행한바 있다. Maniar[13]과 김건도[20]는 B-spline을 이용해 3차원 물체주변의 유동에 대한 문제에 대해 성공적으로 적용시킨 바 있다.

본 논문에서는 패널간 특이점 강도의 단차를 제거하여 특이점 강도의 단차에서 오는 오차를 없애 저차 패널법의 정도를 향상시키고, 문제를 정식화 하였다. 또한 패널을 사각형에서 삼각형으로 바꾸어 프로펠러와 같이 복잡한 형상을 갖는 물체를 보다 잘 표현 하고자 하였다. 먼저 패널의 형상을 사각형에서 삼각형 패널로 변경하여 물체의 형상을 표현하였다. 삼각형 패널은 날개에만 분포시키고 다른 부분은 기존의 사각형 단면을 사용하였다. 이어서 삼각형 패널상에 특이점의 강도가 선형적으로 분포할 수 있도록 특이점의 강도를 선형적으로 표현하여 적용하였다. 특이점의 강도는 다이폴의 강도만 선형적으로 분포시키고 쏘오스의 강도는 균일하다고 가정하였다. 또, 특이점의 위치를 패널의 중심이 아닌 절점으로 이동 시켜 패널간 강도의 단차를 제거하였다. 특이점의 강도가 패널의 각 꼭짓점에 존재할 경우 자기 유도 계수는 패널의 꼭짓점을 공유하는 패널들이 이루는 각으로 정해진다. 패널들이 이루는 각은 다양한 분에서 패널들이 이루는 각을 계산하기 위해 사용하는 입체각(김동건 등[21], 최교환 등[32], D.C. Camp 등[3], Iman aganj 등[7])을 이용하여 계산하였고, A.van oosterom and J.strackee[1]에 의해 정리된 삼각형 패널의 입체각을 구하는 방법을 사용하였다.

양력이 존재하는 3차원 물체에 대한 계산 시 물체의 뒷날에서 교차유동이 발생하게 된다. 이로 인해 날개 뒷날에서의 영 하중 조건을 만족시킬 수 없다. 이를 만족시키기 위해 압력 Kutta 조건을 도입하게 된다. 압력 Kutta 조건 계산을 위해 다양한 방법들이 제안 되어 사용되고 있다. Kinnas[18]는 Newton-raphson 방법을 사용하여 압력 Kutta 조건을 해결하고자 하였다. 날개 뒷날의 압력차와 포텐셜 점프를 변수로 하여 수치미분을 통해 jacobian 행렬을 형성하고, jacobian 행렬은 그 값의 변화가 크지 않아 반복계산을 수행하는 동안 변하지 않

는 다고 가정하였다. Wang 등[19]은 Kinnas[18]가 제안한 방법을 개선하여 계산 시간을 줄일 수 있는 방법을 제안하였다. Wang 등[19]은 jacobian행렬을 수치 미분이 아닌 해석적 방법을 사용하여 구하고, 반복계산 매 단계마다 jacobian행렬을 계산하였다.

본 논문에서는 문제의 정식화에 그 목적이 있으므로 계산시간을 염두에 두지 않고 압력 Kutta 조건을 간단하게 적용할 수 있는 방법을 택하였다. 그 방법으로 secant 방법을 사용하였다. Secant 방법은 jacobian을 구하지 않고, 각 반경별로 압력 Kutta 조건의 계수를 구하여 적용함으로써 계산의 편의성을 도모 하였다.

모든 정식화의 과정은 2차원 패널법에 먼저 적용하여 정식화 방법에 대한 연구를 진행하였다. 3차원 문제의 정식화 검증은 간단한 3차원 형상에 대한 계산을 통해 확인 하였다. 계산에 사용된 3차원 형상은 양력이 없는 구와 타원체, aspect ratio가 큰 날개 그리고 양력이 있는 원형 날개이다. 양력이 없는 구와 타원체의 경우 해석해가 존재함으로 값의 계산의 타당성을 검증함에 있어서 기본이 되는 형상이다. Chord의 길이와 반경의 비가 큰 날개의 경우 chord와 반경의 비가 무한히 크다고 가정하면 3차원 효과가 없어져 2차원과 같은 효과를 얻을 수 있고, 이는 이미 검증된 2차원 패널법의 결과와 비교 할 수 있어 채택하였다. 마지막으로 양력이 존재하는 원형날개에 대해 계산하였다. 양력이 있는 원형날개의 경우 날개의 두께가 0 인 경우에 대해 Jordan[10]에 의해 해석해가 알려져 있어 양력문제에 대한 검증이 가능하여 채택하였다.

2. 패널법의 기본

2.1. 기본 가정

본 논문에서는 이상유체 역학적 특성에 대해서만 다루기로 한다. 따라서 물체는 비점성, 비압축성, 비회전성을 갖는 유체의 유동장 내에서 작동한다고 가정한다.

패널법은 3차원 유동장을 V, 경계면을 S, 경계면에서 유동장 방향의 법선 벡터를 $\vec{n}$으로 둔다. 경계면 S는 물체 표면 S_B , 후류 면 S_W, 그리고 물체와 후류 표면 주변의 외부면(outer control surface) S_∞로 구성되어 있고, 물체를 향하는 유입속도 $\vec{U}_\infty$ 가 있다.(Fig. 2-1)

2.2. 지배방정식과 경계 조건

이상유체 가정 하에서 유동장 내의 유체 영역에서 질량보존의 법칙이 성립해야 하므로 다음과 같은 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{2.1}$$

여기서, ϕ는 섭동 속도 포텐셜(perturbation velocity potential)이다.

지배방정식 (2.1)에 다음과 같은 경계조건을 부과함으로써 프로펠러 주위 유동은 유일하게 정의된다.

• 물체 표면(S_B)에서 운동학적 경계조건을 만족해야 한다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\overrightarrow{U_\infty} \cdot \vec{n} \tag{2.2}$$

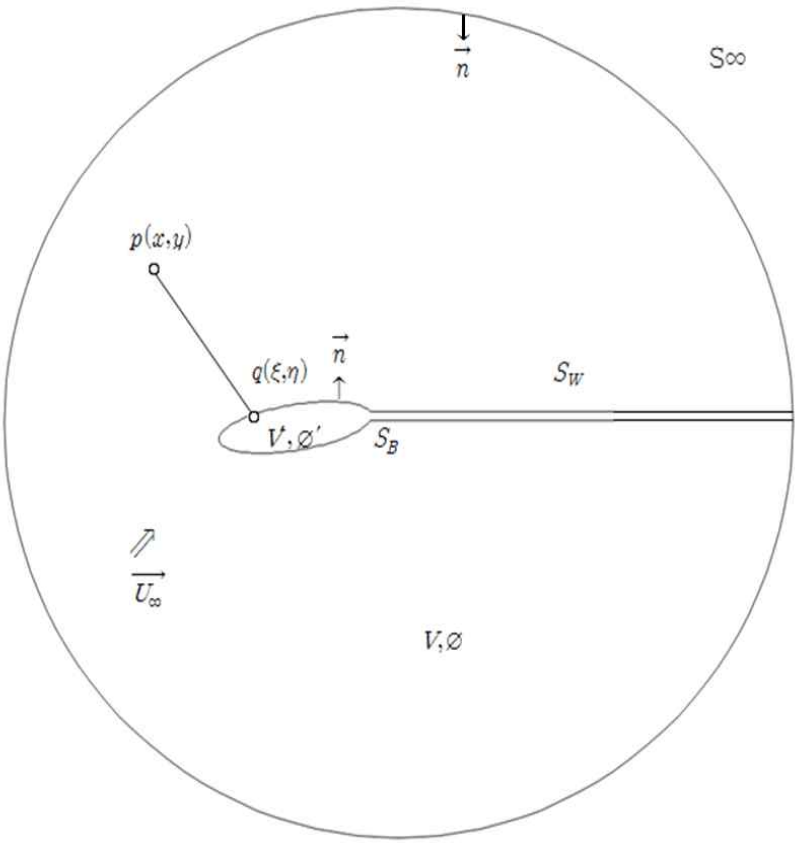

Fig. 2-1 Notation for a general body for the application of Green's theorem(오진안 등[28])

• 후류면(S_W) 은 두께가 없다고 가정한다. S_W을 가로지르는 법선속도 차이($\triangle\frac{\partial\phi}{\partial n}$)와 압력 점프($\triangle p$)는 0이고, 포텐셜 점프($\triangle\phi$)는 허용 한다.

$$(\triangle p)_{on\ S_W} = P^+ - P^- = 0 \tag{2.3}$$

$$(\triangle\frac{\partial\phi}{\partial n})_{on\ S_W} = (\frac{\partial\phi}{\partial n})^+ - (\frac{\partial\phi}{\partial n})^- = 0 \tag{2.4}$$

• 포텐셜 점프는 물체 주변의 순환(Circulation)의 크기와 같다.

$$(\triangle\phi)_{on\ S_W} = \phi^+ - \phi^- = \Gamma \tag{2.5}$$

• 날개 뒷날에서 속도가 유한하다는 Kutta 조건을 만족한다.

$$\nabla\phi_{\ T.E} < \infty \tag{2.6}$$

• 물체에서 무한한 거리에 있는 외부면, S_∞ 에서는 물체로 인한 섭동 속도는 사라질 것이다.

$$\nabla\phi \rightarrow 0,\ as\ S_\infty \rightarrow \infty \tag{2.7}$$

2.3. 적분방정식

제어점 p가 물체 표면에 있을 때,

$$\phi(p) = \iint_{S_B}[\phi(q)\frac{\partial G}{\partial n_q} - \frac{\partial\phi(q)}{\partial n_q}G]ds + \iint_{S_W}\triangle\phi(q)\frac{\partial G}{\partial n_q}ds \tag{2.8}$$

여기서, ϕ 는 섭동 속도 포텐셜을, $\triangle\phi$ 는 날개 뒷날에서의 포텐셜 점

프로써 후류면에서의 다이폴의 세기를 의미하며, G는 다음과 같은 Green의 함수이다.

$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R(p;q)} \tag{2.9}$$

여기서, R은 물체 표면상의 임의점(p)에서 제어점(q)까지의 거리이다.

식 (2.8)에서 물체 표면의 특이점을 제외하면 다음과 같다.

$$\frac{\phi(p)}{2} = \iint_{S_B}[\phi(q)\frac{\partial G}{\partial n_q} - \frac{\partial \phi(q)}{\partial n_q}G]ds + \iint_{S_W}\triangle\phi(q)\frac{\partial G}{\partial n_q}ds \tag{2.10}$$

여기서, $\frac{\partial \phi}{\partial n}$는 물체 표면의 운동학적 경계조건에 의해서 정의되므로 적분방정식 (2.10)은 다이폴 강도 ϕ를 구할 수 있다. 여기서 구해진 ϕ는 물체 표면에서의 포텐셜 값이다. 후류면을 가로지르는 포텐셜 점프는 날개 뒷날의 윗면과 아래면의 포텐셜 차이와 같고, Kutta 조건을 대체한다.[2]

$$\triangle\phi = \phi^{+}_{T.E} - \phi^{-}_{T.E.} \tag{2.11}$$

여기서, +와 -는 각각 날개 뒷날에서의 윗면과 아랫면을 나타낸다.

이러한 형태의 패널법은 Lee[12]에 의해 최초로 프로펠러 정상 유동 문제를 푸는데 적용이 되었고, 본 논문에서는 이러한 섭동 포텐셜법 형태의 적분방정식에 대해 다룬다.

3. 경계치 문제의 정식화

3.1. 삼각형 패널의 배치

일반적인 사각 패널 패널법에서의 N_c는 코드방향 패널의 배치를 말한다. 삼각 패널 패널법에서는 일반적인 표현과 같은 의미를 갖지만 그 구성에 있어서 차이를 보인다. 삼각 패널의 경우 동일 반경상에 아래와 위, 두 개의 패널이 존재함으로 N_{ct}의 경우 아래와 위 패널의 합으로 표현된다. 사각 패널과의 혼란을 막기 위해 삼각 패널에서 N_c는 N_{ct}로 표현하기로 하고, $N_{ct} = N_c \times 2$ 로 표현 할 수 있다. 코드방향 패널의 배치는 사각 패널과 마찬가지로 날개의 앞과 뒤에 패널을 집중시켜 배치한다. M_r은 사각 패널과 마찬가지로 반경방향 패널의 배치를 말하고 동일 반경 상에 있는 위와 아래의 패널을 하나로 취급한다. 패널은 날개의 끝으로 갈수록 집중된다.

삼각 패널은 정렬 삼각 패널로 구성되어 있다. 동일 반경 내에 아래와 위에 엇갈리게 배치하여 하나의 반경을 형성한다. 선형 강도 패널법의 경우 특이점과 제어점이 절점에 위치하고 절점의 개수는 각 반경별로 N_C+1개가 존재 한다.

삼각 패널은 날개면에만 분포시키고 후류면에는 기존의 사각 패널을 분포시켜 계산의 편의를 도모 하였다.

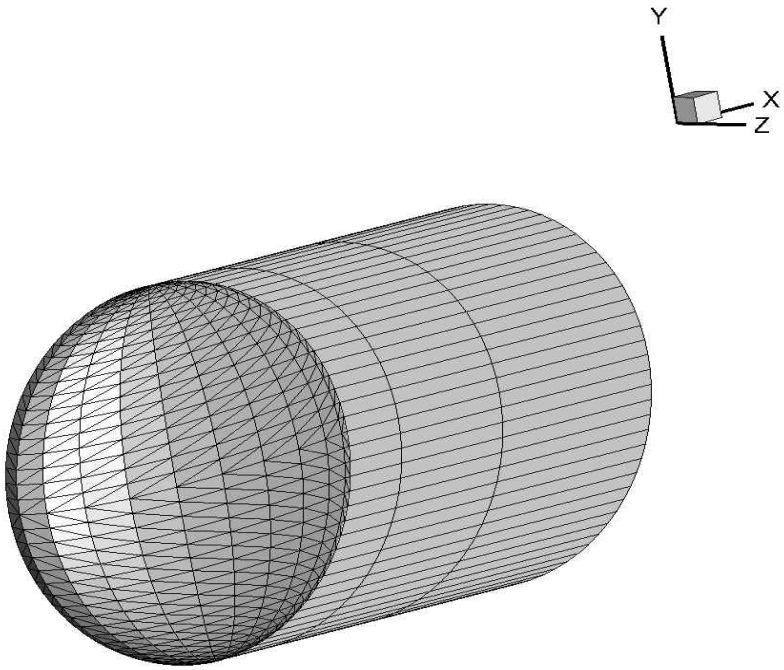

Fig. 3-1 Panel arrangement of a ellipsoid viewed from upstream
(N_{ct}=40, M_r=20)

3.2. 특이점 분포의 이산화

일반적으로 패널법에서는 이산화식 (3.5)를 만족하는 제어점은 패널의 중앙에 위치하고, 패널에 걸쳐 특이점의 강도가 일정하게 분포되어 있다고 가정하였다. 하지만 이러한 가정은 Fig. 3-2에서 보듯이 인접한 패널과의 특이점세기의 차이가 발생한다. 이러한 패널간 특이점의 단차는 계산의 정도를 낮추는 원인이 된다.

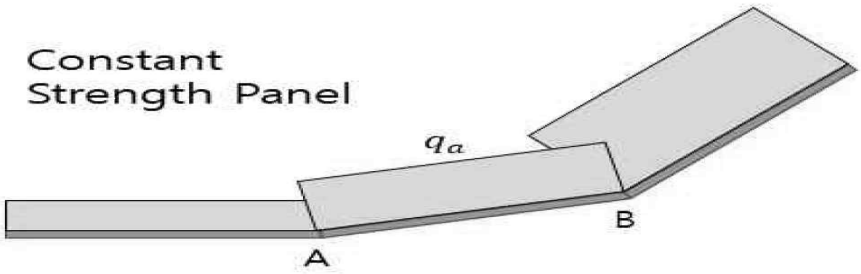

Fig. 3-2 Description of constant strength panels

본 논문에서는 특이점간의 세기의 차이로 인한 단차를 제거하고자 특이점의 세기가 패널에 걸쳐 선형적으로 분포되어 있고, Fig. 3-3에서와 같이 패널을 연결하는 절점(node)에서 세기가 연속된다고 가정한 부분 선형 패널법(Piecewise Linear Panel Method)을 사용하여 계산을 수행하였다. 부분 선형 패널법에 대해서는 이미 박기덕[24], 박기덕 등[25] 그리고 이동현[29]에 의해 계산이 수행된바 있다.

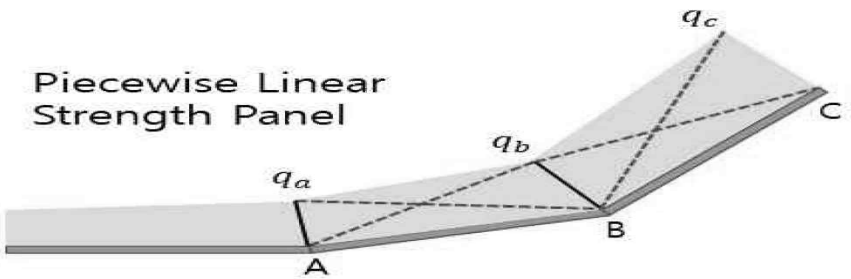

Fig. 3-3 Description of piecewise linear strength panels

경계치 문제의 해는 적분방정식 (2.10)을 만족하도록 프로펠러와 후류를 나타내는 특이점의 강도를 결정하는 것으로 구성된다. 프로펠러와 후류면의 연속된 특이점의 분포는 삼각형 패널을 통해 선형적으로 분포 된다. Source의 강도는 운동학적 경계조건에 의해 결정되고 오직 다이폴의 강도를 구하게 된다.

다이폴 강도는 패널의 포텐셜 값이며, 제어점에서 적분방정식의 이산화 된 형태를 만족시킴으로서 결정된다. 제어점은 패널의 절점에 위치하고 있다. 적분방정식을 이산화 시키면 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^{N_{node}} D_{ij}\phi_j + \sum_{m=1}^{M_r} W_{im}(\triangle\phi)_m = \sum_{j=1}^{N_{node}} S_{ij}(\frac{\partial\phi}{\partial n})_j, \quad i=1,2,...,N_{node} \tag{3.1}$$

여기서, N_{node} 은 날개와 허브의 총 패널의 개수이고 N_c는 chord방향 절점의 개수이고, $N_{node}=(N_c+1)\times M_r+1$ 로 표현된다. M_r 은 반경방향 패널의 개수, D_{ij} 는 j 번째 다이폴 패널의 단위 강도에 의한 i 번째 제어점의 유기 포텐셜, S_{ij} 은 j 번째 source 패널의 단위 강도에 의한 i 번째 제어점의 유기 포텐셜, W_{im} 은 후류면상의 M 번째 반경의 다이폴에 의한 i 번째 제어점의 유기 포텐셜 그리고 $(\frac{\partial\phi}{\partial n})_j$ 는 경계조건에 의한 j 번째 제어점의 source 강도이다. 후류면의 M 번재 반경의 다이폴 강도, $(\triangle\phi)_m$은 날개 뒤에서의 포텐셜 점프이다.

이산화 식 (3.1)를 선형 강도를 갖는 다이폴을 적용하여 선형대수 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{N_{node}} A_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^{N_{node}} B_{ij}(\frac{\partial\phi}{\partial n})_j, \quad i=1,2,...,N_{node} \tag{3.2}$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= D_{ij} \qquad \text{if } i\neq j \\ &= Solidangle \text{ if } i=j \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$A_{ij} = A_{ij} - W_i \text{ if } j = 1$$
$$= A_{ij} + W_i \text{ if } j = N+1 \tag{3.4}$$

식 (3.3)에서의 D_{ij}는 삼각형 패널상에 다이폴이 선형적으로 분포할 때 dipole에 의한 영향계수이다. 선형 강도의 분포는 Fig.3-4에서 보는 것처럼 패널 각 꼭짓점에 다이폴의 강도가 존재하고, 그 외의 꼭짓점에서의 강도는 영이 된다.

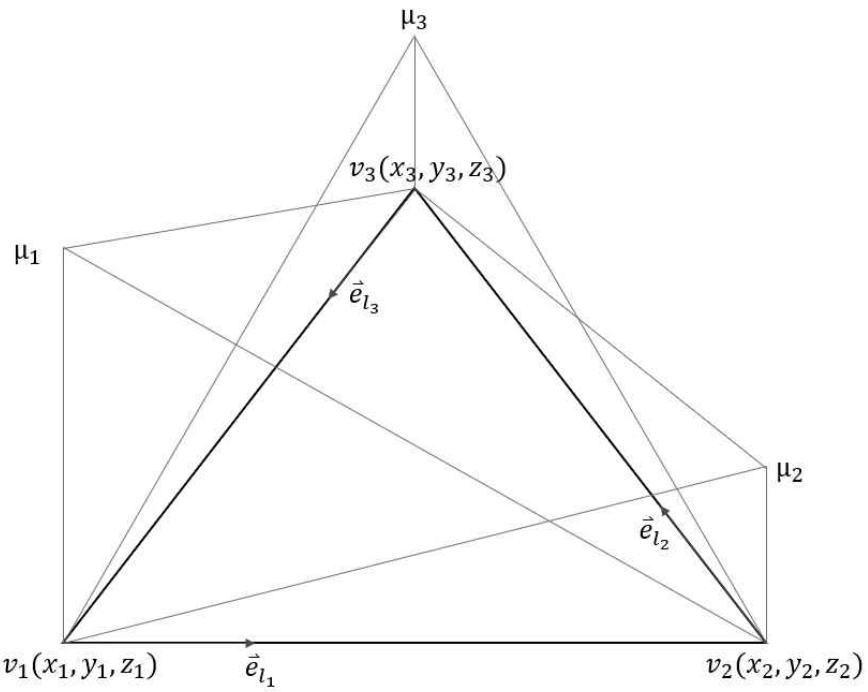

Fig. 3-4 Linear dipole strength distribution on a triangular panel

Fig. 3-5에서 보인 선형 강도의 분포는 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mu_i(x_i, y_i, z_i) = Ax_i + By_i + Cz_i + D, \quad i = 1,2,3 \tag{3.5}$$

여기서, μ_i는 i번째 꼭짓점에서의 다이폴 강도이고, A, B, C 그리고 D는 꼭짓점에서의 다이폴 강도에 의해 구해진 계수이다.

패널 각 변의 방향벡터를 $\vec{e}_{l_i}$로, 다이폴의 위치를 (x_i,y_i,z_i)로 각각 정의한다. 선형 강도 분포에 상응하는 패널의 기하학으로부터 A, B 그리고 C에 대한 선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla\mu \cdot \vec{e}_{l_i} = \frac{\mu_{i+1}-\mu_i}{l_i} = \frac{A(x_{i+1}-x_i)+B(y_{i+1}-y_i)+C(z_{i+1}-z_i)}{l_i}, \quad i=1,2,3 \qquad (3.6)$$

꼭짓점과 각 변의 방향은 법선벡터가 패널의 밖으로 향할 수 있도록 반시계방향으로 정의하고, $i=4$는 첫 번째 꼭짓점이 된다.

W_{im}은 후류의 다이폴에 의한 영향 계수이고, 후류의 패널상에 존재하는 다이폴은 사각 패널의 위에 쌍선형(Bilinear)으로 분포하고 있다고 가정한고, Shu 등[12]이 제안한 분포를 따른다.(Fig. 3-5)

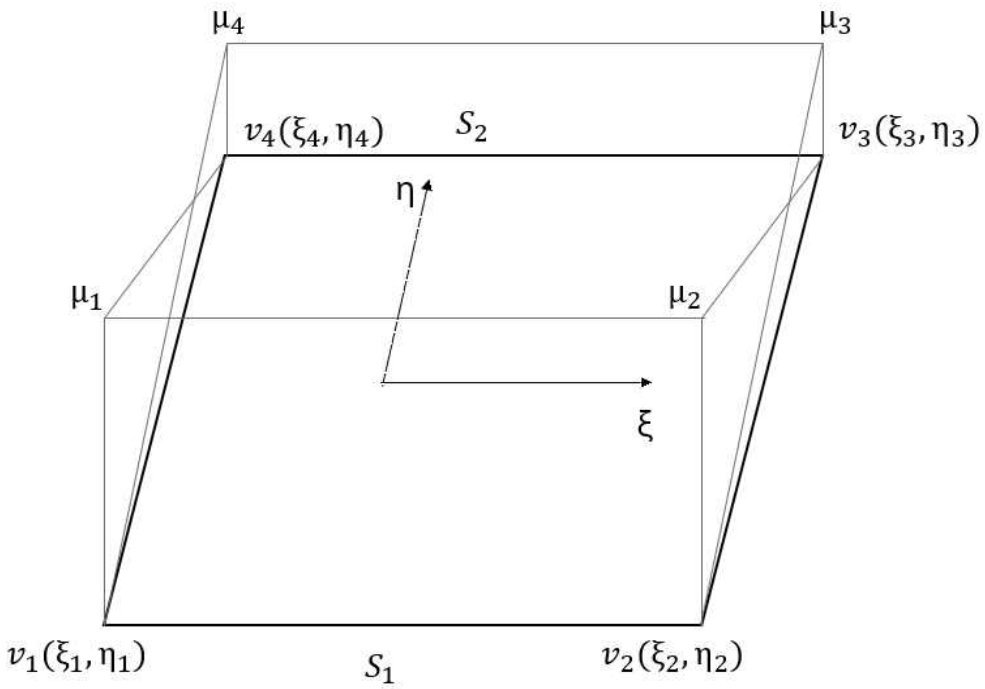

Fig. 3-5 Bilinear dipole strength distribution on a wake panel

패널은 $\zeta=0$의 평면에 있고, ζ 축의 방향이 패널의 법선 벡터의 방향과 같도록 직교 좌표계 ($\xi-\eta$ coordinate system)를 정의한다. ξ축과 η축 방향의 단위 벡터는 각각 $\vec{e}_\xi$와 $\vec{e}_\eta$로 나타낸다.

후류 패널상의 다이폴의 쌍선형 강도 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_i(\xi_i,\eta_i) = A\xi_i + B\eta_i + C\xi_i\eta_i + D, \quad i=1,2,3,4 \tag{3.7}$$

여기서, μ_i는 다이폴의 강도이고, A, B, C 그리고 D는 꼭짓점에서의 다이폴 강도에 의해 구해진 계수이다. 후류에서의 다이폴 강도의 분포는 각각의 꼭짓점에 분포하는 것이 아니라 한 변(S_1, S_2)의 양 끝에 다이폴의 강도가 존재한다고 가정한다.

일반적으로 강도가 패널상에 선형적으로 분포할 경우 특이점의 위치는 패널의 꼭짓점이 된다. 또한, 제어점의 위치도 통상 특이점의 위치와 같은 패널의 꼭짓점에 존재한다. 본 논문에서도 일반적인 배치를 따른다. 하지만 제어점이 패널의 꼭짓점에 존재하게 되면 날개의 뒷날에서 Kutta 조건을 적용함에 있어서 어려움이 존재 한다. 이를 회피하기 위해 Fig. 3-7과 같이 제어점을 앞쪽으로 옮겨서 배치하여 계산을 진행 한다.

식 (3.3)에서 입체각은 자기 자신에 의해 유도되는 다이폴 포텐셜이다.

일반적으로 판요소내에서 다이폴의 세기가 일정하면 다이폴 판요소의 영향이 다이폴을 둘러싸고 있는 변에서의 선적분으로 표시되나, 다이폴 판요소의 각 꼭짓점에서는 내각의 특성에 의해 결정될 수 있다. (이창섭, 서정천[30])

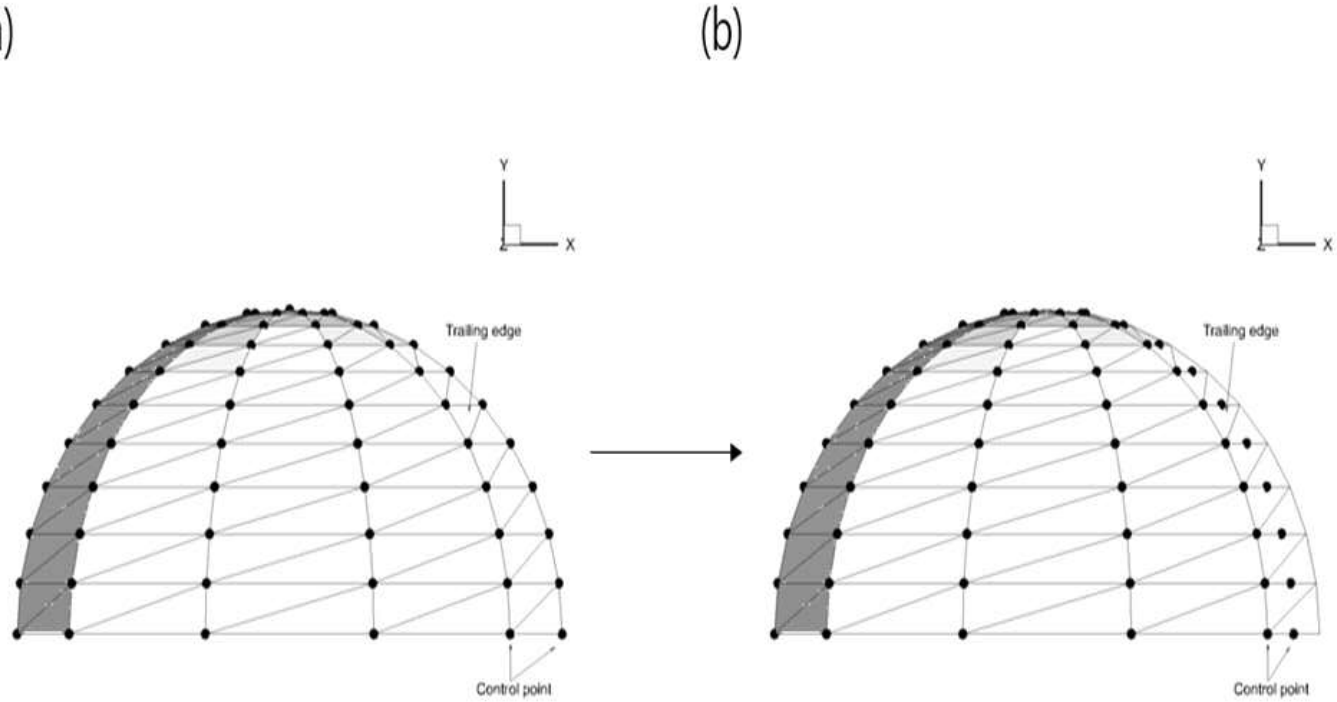

Fig. 3-6 Relocation of the trailing edge control points

3.3. 입체각

다이폴 판요소의 각 꼭지점에서의 내각을 구하는 방법은 이창섭, 서정천[30]에 의해 Gauss-Bonnet의 정리를 이용하는 방법과 Stokes 정리를 이용하는 방법이 제안된 바 있다.

본 논문에서는 3차원 각도인 입체각을 이용하여 각 다이폴 판요소의 꼭지점에서의 내각을 구하고, 꼭지점을 공유하는 판요소들의 입체각의 합으로 자기 자신에 의해 유도되는 포텐셜의 값을 구하였다.

입체각은 다음과 같이 정의 된다. 삼각 패널의 꼭지점을 Fig. 3-7처럼 벡터 R_1, R_2 그리고 R_3으로 정한고, 삼각 패널에 의한 O 점에서의 입체각, Ω 는 S/r^2과 같으며, S는 반지름이 r인 구위의 삼각형 ABC의 면적이다. $r=1$은 $\Omega=S$임을 의미한다.

A.van oosterom and J.strackee[1]에 의해 입체각을 구하는 방법이 다음과 같이 정리 되었다.

먼저, 다음과 같이 표현된다.

$$\cos(\frac{1}{2}\Omega)=\frac{1+\cos(a)+\cos(b)+\cos(c)}{4\cos(\frac{1}{2}a)\cos(\frac{1}{2}b)\cos(\frac{1}{2}c)} \tag{3.8}$$

여기서, a, b 그리고 c는 Fig.3-8에 표시된 A, B 그리고 C의 호이다.

이는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\cos(\frac{1}{2}\Omega)=\frac{1+\sum_i \cos(x_i)}{4\prod_i \cos(\frac{1}{2}x_i)}\; i=1,2,3, x_1=a, x_2=b, x_3=c \tag{3.9}$$

삼각함수의 관계를 이용하면 식 (3.10)과 같이 표현 된다.

$$\tan(\frac{1}{2}\Omega) = \frac{1+2\prod_i \cos(x_i) - \sum_i \cos^2(x_i)^{\frac{1}{2}}}{1+\sum_i \cos(x_i)} \tag{3.10}$$

식 (3.10)의 분자는 $\sin(a)\sin(h)$와 같고, h는 A와 BC 사이의 호이다. 그리고 기하학적 해석을 이용하여 식 (3.10)을 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\tan(\frac{1}{2}\Omega) = \frac{\overrightarrow{R_1} \bullet (\overrightarrow{R_2} \times \overrightarrow{R_3})}{R_1R_2R_3 + (\overrightarrow{R_1} \bullet \overrightarrow{R_2})R_3 + (\overrightarrow{R_1} \bullet \overrightarrow{R_3})R_2 + (\overrightarrow{R_2} \bullet \overrightarrow{R_3})R_1} \tag{3.11}$$

$\tan^{-1}$ 를 이용 하여 입체각을 구하는 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\Omega = 2\tan^{-1}(\frac{N}{D}) \tag{3.12}$$

여기서, N은 식 (3.11)의 분자이고 D는 식 (3.11)의 분모이다.

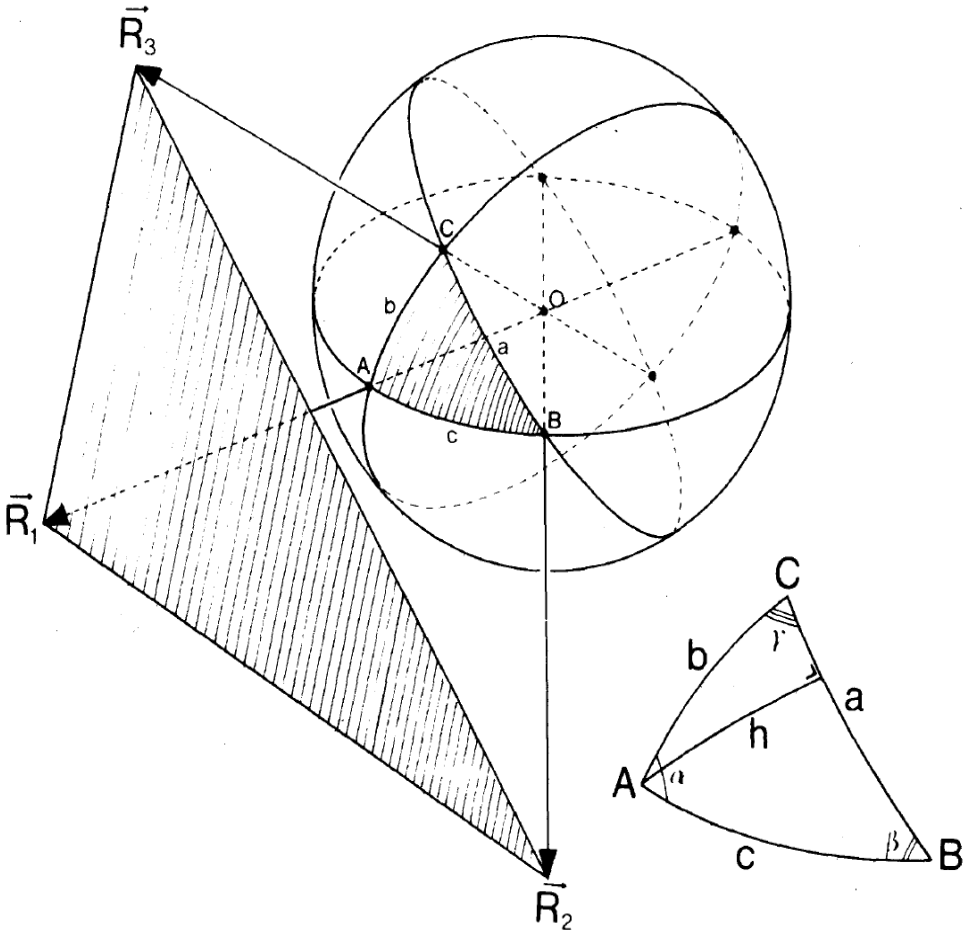

Fig. 3-7 Characteristics of solid angle
(A.van oosterom and J.strackee)

입체각의 타당성 검증을 위해서 다음과 같이 ϵ을 감소시키면서 계산을 진행 하였다.

검증을 위한 형상은 Fig.3-8과 같이 삼각형 패널의 조합으로 형성하였다.

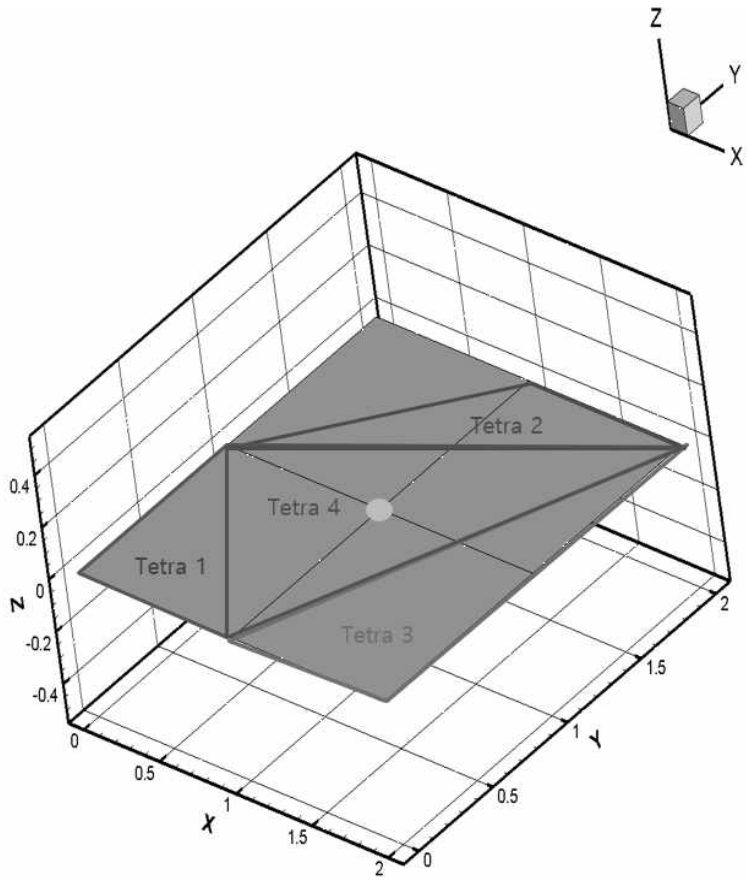

Fig. 3-8 Self-induction coefficient calculated by solid angle

입체각이 계산되어 지는 점은 패널들이 이루는 면의 가운데 점이고, 이점을 Fig. 3-9과 같이 ϵ만큼 감소시켜 ϵ이 패널상에 존재 할 때의 수렴성을 확인 하였다.

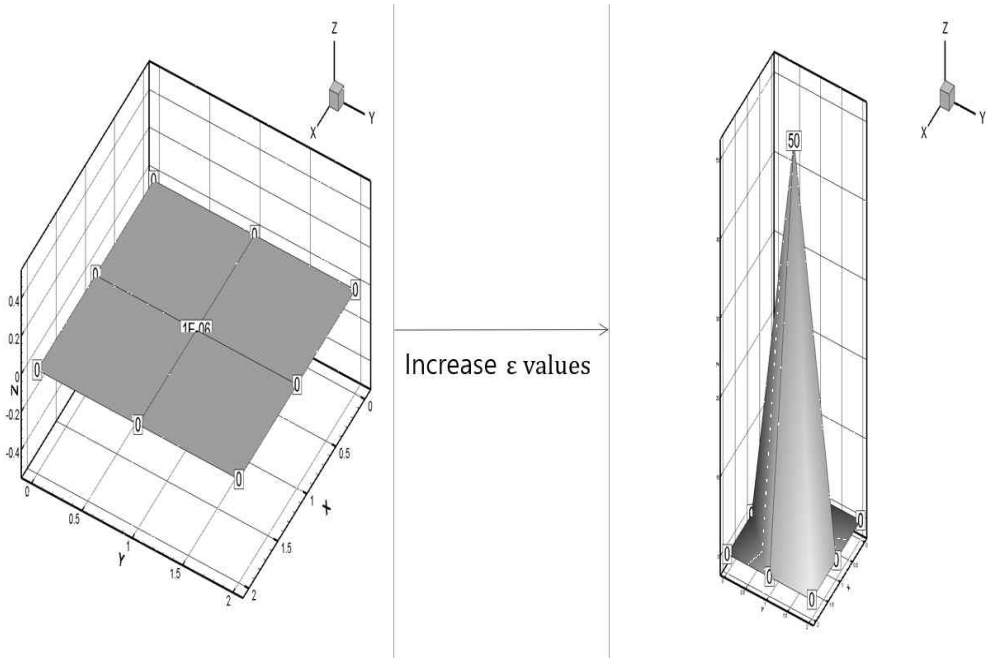

Fig. 3-9 Increment of the epsilon for the verification of solid angle calculation

ϵ은 Table. 3-1 과 같이 감소시켰다.

Table. 3-1 Decrease of ϵ for the calculation of influence coefficient($\epsilon = 1.0 \times 10^{-7}$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ϵ	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

ϵ은 5단위만큼 패널에 위치하게 될 때까지 줄이면서 계산하였고, ϵ의 이동 방향은 패널의 법선방향으로 이동하였다. 입체각은 각 패널의 입체각의 합으로서 표현이 된다.

입체각의 계산점을 Tetra 4의 중앙에 위치한 이유는 계산점이 패널상에 존재할 때의 수렴성에 대한 확인과, 계산점이 존재하지 않는 주변의 다른 패널들에 대한 영향을 함께 알아보기 위해서이다.

Table 3-2 Results of influence coefficient calculation as ϵ decreases

Epsilon	50e-7	45e-7	40e-7	35e-7	30e-7	25e-7	20e-7	15e-7	10e-7	5e-7	1e-7
Tetra 1	-0.0002	-0.0002	-0.0003	-0.0004	-0.0006	-0.0008	-0.0013	-0.0022	-0.0049	-0.0189	0
Tetra 2	-0.0002	-0.0002	-0.0003	-0.0004	-0.0006	-0.0008	-0.0013	-0.0022	-0.005	-0.0192	0
Tetra 3	-0.0002	-0.0002	-0.0003	-0.0004	-0.0006	-0.0008	-0.0013	-0.0022	-0.005	-0.0192	0
Tetra 4	-0.0006	-0.0007	-0.0009	-0.0012	-0.0017	-0.0024	-0.0038	-0.0067	-0.0149	-0.0588	-6.2832
Ω	-0.0012	-0.0014	-0.0019	-0.0025	-0.0033	-0.0048	-0.0075	-0.013	-0.0298	-0.1162	-6.2832

ϵ이 패널위에 위치하게 되면 3차원 각은 평면이 되므로 2π가 되어야 한다. 결과를 살펴보면 Table. 3-2에서 보듯이 ϵ이 점차 작아져 패널상에 위치하게 되면 2π가 됨을 확인 할 수 있다. 또한 ϵ이 패널에 다가올수록 ϵ이 존재하는 패널에 비해 다른 패널의 여향은 감소하고, 패널상에 위치하게 되면 그 영향은 영이 됨을 확인 할 수 있다.

위에서 확인 했듯이 다이폴 판요소의 꼭지점을 공유하는 패널들이 이루는 각을 입체각로 계산하여도 계산의 정확도에 있어서 충분한 타당성을 제공 받을 수 있다.

3.4. Kutta 조건

물체 주변의 순환을 특정하기 위해서 Kutta 조건이 필요하며, 이는 후류면에서의 포텐셜 점프와 같다. 포텐셜 기반의 패널법에서는 Morino[14]에 의해 처음 제안 되었다. Morino[14]의 Kutta 조건의 경우 날개의 뒷날의 각도가 작은 2차원 단면에서는 정도 높은 결과를 준다. 하지만 날개 뒷날의 각도가 큰 단면의 경우에 오차가 발생한다. Lee[12]는 이 문제를 해결하기 위해 교차유동이 없는 2차원 단면에 대해 후류면에서의 포텐셜 점프를 교란 포텐셜이 아닌 식 (3.13)과 같이

총 포텐셜을 사용하여 해결하고자 하였다.

$$(\triangle\phi)_{wake} = \Phi^u - \Phi^l = \phi^u_{t.e} - \phi^l_{t.e} + \overrightarrow{U}_\infty \bullet \vec{r}_{t.e} \qquad (3.13)$$

하지만 이는 2차원 단면의 경우에는 정도 높은 결과를 주지만, 3차원 물체는 교차유동이 존재해 날개의 뒷날에서 영 하중조건을 만족시키지 못하였다. 특히, 물체의 끝으로 갈수록 교차유동이 심해져 날개 뒷날에서의 하중 차이가 크게 발생한다. 이 문제를 해결하기 위해 pressure Kutta 조건이 제안 되어 사용되고 있다.

Pressure Kutta 조건은 후류면의 포텐셜 점프에 영향을 주어 영 하중조건을 만족시키는 방법이다.

$$(\triangle\phi)_{wake} = \phi^u_{t.e} - \phi^l_{t.e} + \overrightarrow{U}_\infty \bullet \vec{r}_{t.e} + \gamma \qquad (3.14)$$

식(3.14)에서 γ는 후류의 포텐셜 점프에 영향을 주는 계수이다. γ는 날개 뒷날에서의 압력계수의 차이에 의해 결정되고 반복계산을 통해 구할 수 있다.

$$(\triangle\phi)^{(k)}_m = (\phi^{N_c}_m - \phi^1_m)^{(k)} + (\overrightarrow{U}_\infty \bullet \vec{r}_{t.e})_m + \gamma^{(k-1)}_m, m = 1 \ldots M_r \qquad (3.15)$$

여기서, $\phi^{N_c}_m$과 ϕ^1_m은 날개 뒷날에서의 포텐셜 값이고 첨자 k는 반복계산 횟수이다.

Pressure Kutta 조건을 만족시키기 위한 γ값을 구하는 다양한 반복계산 방법이 제안 되어 있고, 본 논문에서는 secant 방법을 사용하여 계산하였다. Secant 방법은 수식의 미분 없이 두 점을 이용하는 수치미분을 이용하여 값을 구할 수 있기 때문에 간편하게 수식에 적용 할 수 있다.

γ는 식 (3.16)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\gamma_m^{(k)} = \gamma_m^{(k-1)} - \triangle C_{p_m}^{(k-1)} \frac{\gamma_m^{(k-1)} - \gamma_m^{(k-2)}}{\triangle C_{p_m}^{(k-1)} - \triangle C_{p_m}^{(k-2)}}, m = 1 \ldots M_r \qquad (3.16)$$

여기서 $\triangle C_p$는 날개 뒷날에서의 압력계수의 차이이다.

$k=0$일 경우는 Lee[2]의 수정된 Morino's Kutta 조건만 적용된 상태에서의 값이고 $k=1$의 경우 γ값은 0.01을 사용하였다.

식 (3.1)에 pressure Kutta 조건을 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{N_{node}} D_{ij}\phi_j^{(k)} + \sum_{m=1}^{M_r} W_{im}(\phi_m^{N_c} - \phi_m^1)^{(k)} = \sum_{j=1}^{N_{node}} S_{ij}(\frac{\partial \phi}{\partial n})_j - \sum_{m=1}^{M_r} W_{im}[(\vec{U}_\infty \cdot \vec{r}_{t.e})_m + \gamma_m^{(k-1)}], \quad i = 1,2,...,N_{node} \qquad (3.17)$$

Pressure Kutta 조건을 적용하였을 경우의 날개 뒷날에서의 영 하중 조건의 만족은 Fig. 3-10를 통해 확인 할 수 있다. 그림에서 보듯이 초기 $-C_p$의 값은 영 하중을 만족시키지 못하고 있음을 알 수 있다. 하지만 pressure Kutta 조건을 적용하면 영 하중을 만족함을 확인 할 수 있고, Fig. 3-11을 통해 반경 방향으로 날개 뒷날에서 영 하중을 만족하고 있음을 확인 할 수 있다.

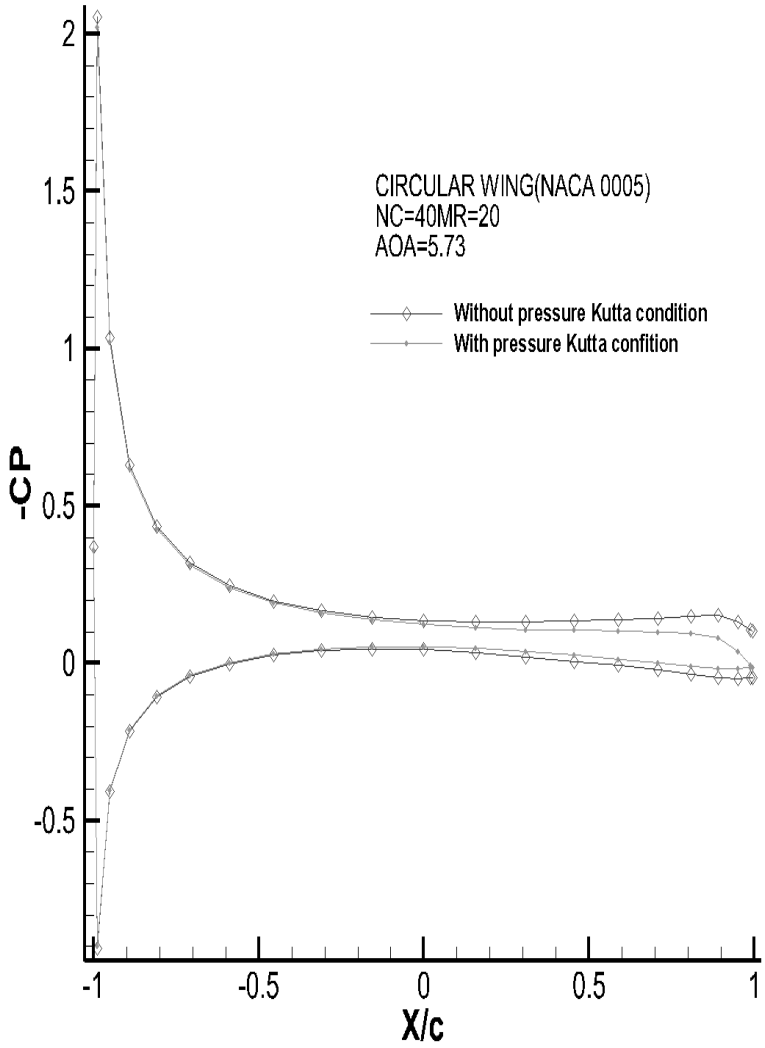

Fig. 3-10 Chordwise $-C_p$ distribution by the pressure Kutta condition for the circular wing(NACA 0005, N_c=40, M_r=20, α=5.73°, r/R=0.89101)

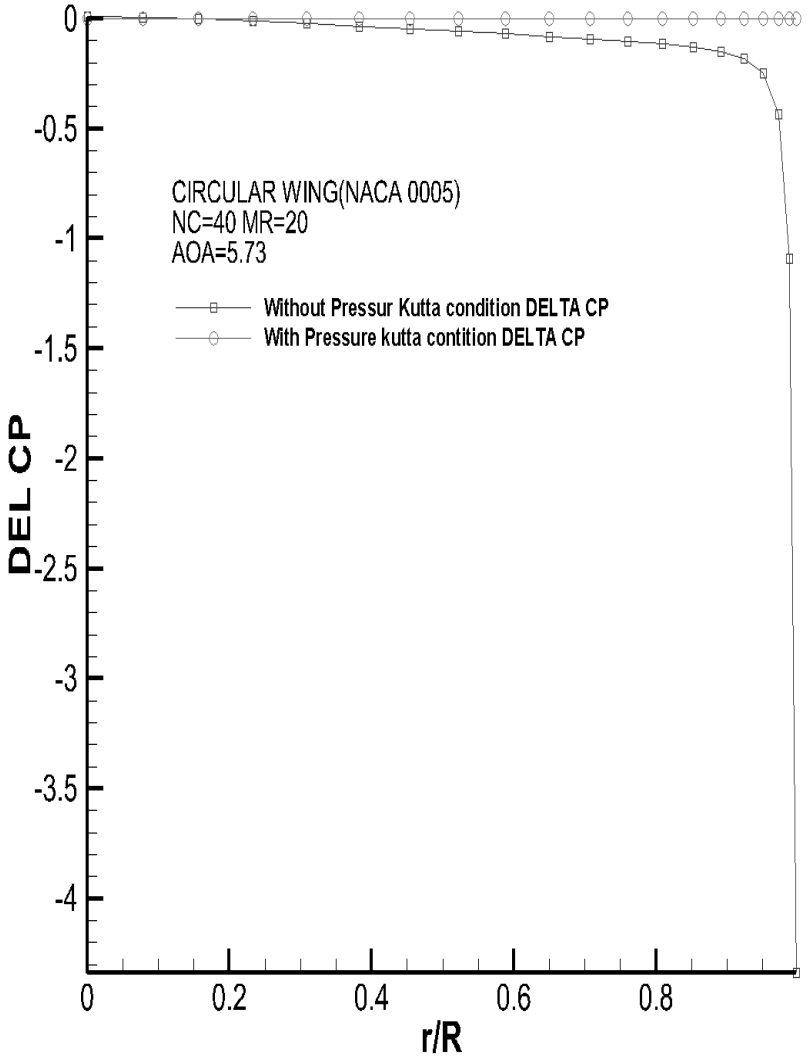

Fig. 3-11 Radial $\triangle C_p$ distribution by the pressure Kutta condition for the circular wing(NACA 0005, N_c=40, M_r=20, α=5.73°)

3.5. 속도와 압력의 계산

본 논문에서 속도의 계산은 3점을 이용한 이차방정식을 사용하여 계산하였다.

먼저 특이점에서의 u방향 접선벡터는 다음과 같이 구할 수 있다. Fig. 3-13에서 점(P_0,P_1,P_2)는 한 평면상에 존재하는 점이다.

$$P_0=(X_0,\,Y_0,\,Z_0),\,P_1=(X_1,\,Y_1,\,Z_1),\,P_2=(X_2,\,Y_2,\,Z_2) \tag{3.18}$$

ξ는 P_1과 P_2를 지나는 벡터이고 국부좌표계의 기준선으로 설정한다. ξ방향의 방향 벡터 $\vec{e}_\xi$와 P_1과 P_0를 지나는 벡터 $\vec{r}_1$를 평면으로 하는 법선 벡터를 ζ로 설정한다. 마지막으로 ξ와 ζ평면의 법선벡터를 η로 하여 국부좌표계를 설정한다.

$$\begin{aligned}&\vec{r}_1=\overrightarrow{P_2}-\overrightarrow{P_1},\ \vec{r}_2=\overrightarrow{P_0}-\overrightarrow{P_1},\ \vec{r}_3=\vec{r}_1\times\vec{r}_2,\\&\vec{e}_\xi=\frac{\vec{r}_1}{c},\ \vec{e}_\zeta=\frac{\vec{r}_3}{ac},\ \vec{e}_\eta=\vec{e}_\xi\times\vec{e}_\zeta\end{aligned} \tag{3.19}$$

여기서, $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ 그리고 $\vec{e}_\zeta$ 는 국부좌표계의 방향벡터이다.

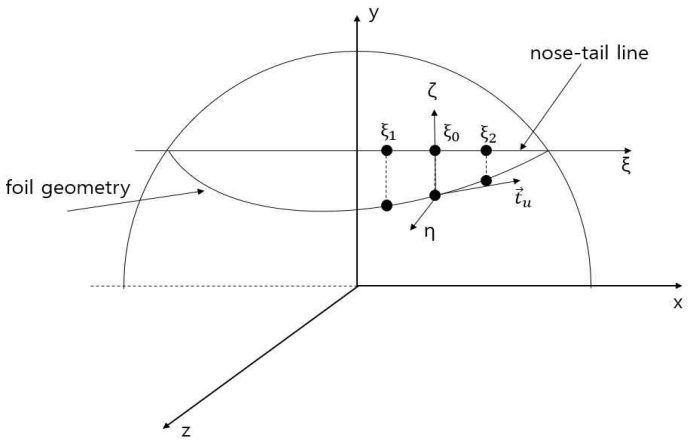

Fig. 3-12 Calculate of the tangential vector passing 3 points

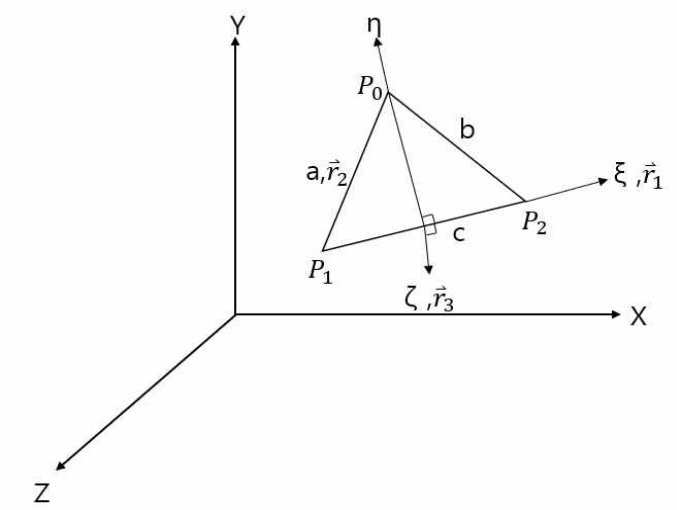

Fig. 3-13 Local coordinate system for the calculation of tangential vector at nodal points

3점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적을 이용하여 Fig. 3-14의 d, c_1 그리고 c_2를 구한다.

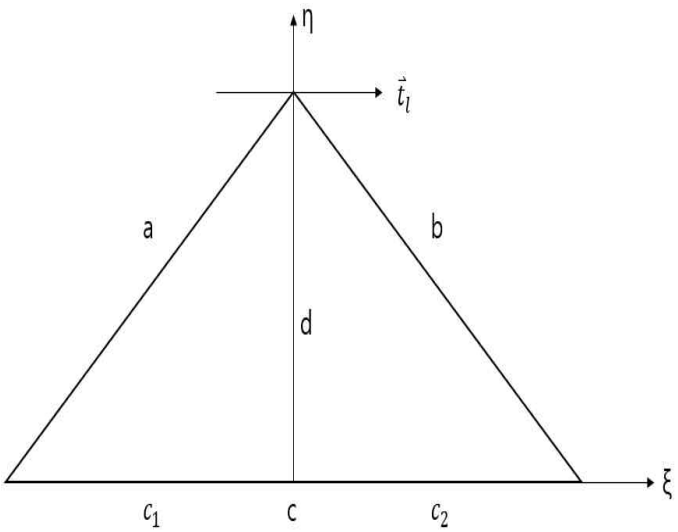

Fig. 3-14 Tangential vector at local coordinate system

3점을 지나는 방정식을 다음과 같이 정의 한다.

$$\eta = -\frac{d}{c_1 c_2}(\xi + c_1)(\xi - c_2) \tag{3.20}$$

식 (3.20)를 ξ에 대해 미분 하여 접선벡터의 기울기를 구하고, 국부 좌표계에서의 접선벡터를 구한다.

$$\vec{t}_l = \vec{e}_\xi + (\frac{d\eta}{d\xi})\vec{e}_\eta \tag{3.21}$$

여기서, $\vec{t}_l$은 국부좌표계에서의 접선벡터이다.

식 (3.21)의 접선벡터는 원 좌표계의 방향벡터를 이용하여 원 좌표계의 접선벡터를 구한다.

$$\vec{t}_u = \vec{t}_\xi(\vec{e}_l \bullet \vec{e}_g) \tag{3.22}$$

여기서, $\vec{e}_l$은 국부좌표계에서의 방향벡터이고, $\vec{e}_g$는 원 좌표계에서의 방향벡터이다.

$$\begin{aligned} &\vec{e}_g = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \\ &\vec{e}_x = (1,0,0),\ \vec{e}_y = (0,1,0),\ \vec{e}_z = (0,0,1) \end{aligned} \tag{3.23}$$

v방향의 접선벡터도 u방향의 접선벡터와 같은 방법으로 구할 수 있다.

u와 v 방향속도는 접선방향 속도를 u와 v방향으로 투영시킨 속도이고, 접선벡터를 구하는 방식과 같이 포텐셜에 대해 식 (3.21)를 구하여 u와 v방향으로 각각 미분하여 얻을 수 있다. 접선방향 속도는 u와 v방향 속도를 ξ와 η방향으로 변환하여 벡터의 합으로써 구할 수 있다.

먼저 ξ방향은 u방향과 일치시키고 η방향은 ξ방향과 직교하도록 국부 좌표계를 정의한다. 국부좌표계의 정의에 의해 ξ방향의 속도는 u방향의 속도와 같고, η방향의 속도는 식 (3.24)와 같이 구할 수 있다.

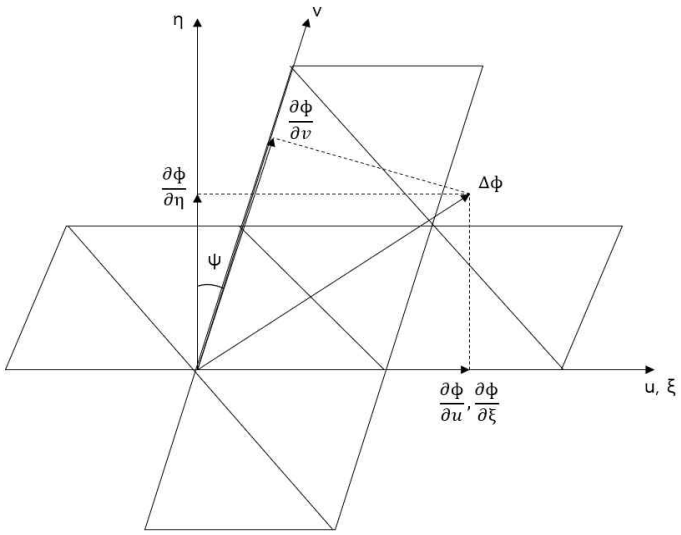

Fig. 3-15 Projection of the velocity vector to the local coordinate system

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial u}\sin\psi}{\cos\psi} \tag{3.24}$$

여기서, ψ 는 η 방향과 v 방향 사이의 각이다. 총 속도(toatl velocity)는 접선방향 교란속도(perturbation velocity)와 유입속도(inflow velocity)의 합으로 구할 수 있다.

날개 뒷날에서 u방향 속도와 v방향 속도의 계산은 선형 보간법을 사용하여 계산한다.

$$u_{1\,or\,nc+1} = u_{2\,or\,nc} + \frac{su_{1\,or\,nc+1} - su_{2\,or\,nc}}{su_{3\,or\,nc-1} - su_{2\,or\,nc}}(u_{3\,or\,nc-1} - u_{2\,or\,nc}) \tag{3.25}$$

$$v_{1\,or\,nc+1} = v_{2\,or\,nc} + \frac{su_{1\,or\,nc+1} - su_{2\,or\,nc}}{su_{3\,or\,nc-1} - su_{2\,or\,nc}}(v_{3\,or\,nc-1} - v_{2\,or\,nc}) \tag{3.26}$$

여기서 su는 코드방향의 길이이고, 아래 첨자는 날개 뒷날에서의 특이점의 위치이다.

압력 계수는 베르누이 방정식을 이용 하여 간단하게 구할 수 있다.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - (\frac{|\overrightarrow{V}|}{U_\infty})^2 \tag{3.27}$$

4. 2차원 날개 단면에 적용

4.1. 2차원 구분 선형 패널법의 정식화

2차원 날개 단면에 대한 적분방정식은 다음과 같다.

$$-\pi\phi(p) = \int_{S_B} [\phi(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q) - \frac{\partial\phi(q)}{\partial n_q}\log R(p;q)]ds + \int_{S_W} \triangle\phi(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q)ds \tag{4.1}$$

이때, 특이점의 개수는 기존의 제어점과 특이점 모두 패널의 중앙에 균일 강도 패널법과 달리 특이점이 절점에 위치한 관계로 개수가 1개 늘어난 N+1개가 됨을 주의 하여야 한다. 제어점의 경우 패널의 중앙에 위치하고 개수는 N개가 된다.

적분방정식 (4.1)을 이산화 하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{N+1} D_{ij}\phi_j + W_i(\triangle\phi)_{wake} = \sum_{j=1}^{N+1} S_{ij}(\frac{\partial\phi}{\partial n})_j \tag{4.2}$$

여기서, D_{ij}는 j 번째 다이폴 패널의 단위 강도에 의한 i 번째 제어점의 유기 포텐셜, S_{ij} 은 j 번째 소스 패널의 단위 강도에 의한 i 번째 제어점의 유기 포텐셜, W_i 은 후류의 다이폴에 의한 i 번째 제어점의 유기 포텐셜 그리고 $(\frac{\partial\phi}{\partial n})_j$ 는 경계조건에 의한 j 번째 제어점의 소스 강도이다.

이산화식 (4.2)를 선형강도를 갖는 다이폴을 적용하면 선형대수 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=1}^{N+1} A_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^{N+1} S_{ij}(\frac{\partial\phi}{\partial n})_j \tag{4.3}$$

여기서,

$$A_{ij} = DR_{ij-1} + DL_{ij} \quad \text{if } i = 1,2,3,,,,N \quad j = 2,3,4,,N \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= DL_{ij} \text{ if } j=1 \\ &= DR_{ij} \text{ if } j = N+1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij} - W_i \text{ if } j=1 \\ &= A_{ij} + W_i \text{ if } j=N+1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

여기서, DL과 DR은 Fig. 4-1과 Fig. 4-2와 같이 패널의 양 끝에 각각 선형강도를 갖는 다이폴 영향계수를 의미한다.

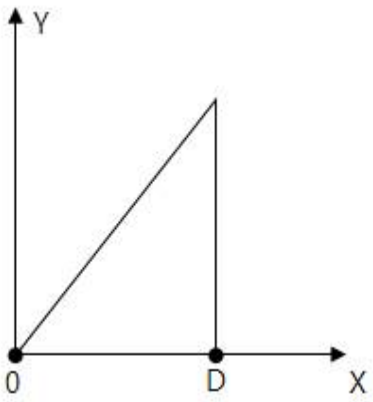

Fig. 4-1 DR dipole influence coefficient

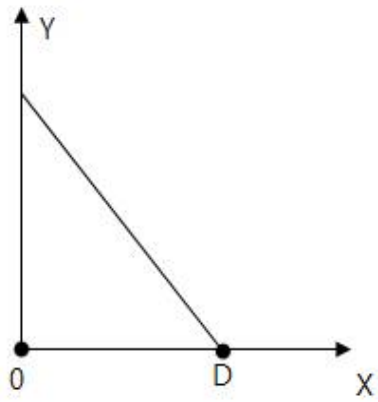

Fig. 4-2 DL dipole influence coefficient

선형강도 패널법에서는 제어점의 위치가 절점에 위함으로 각 절점에서의 자기 유도 계수를 고려하여한다. 절점에서의 자기 유도 계수는 Jack Moran[11]에 의해 제안되었다. Jack Moran[11]은 각 절점에 인접한 두 패널 사이의 각도로 표현할 수 있다고 보았다.

제어점 P가 i번째 절점에 위치할 때 자기 유도 계수는 다음과 같다.

$$\theta_{self} = \frac{1}{2\pi}\phi_i(\beta_{pi-1} + \beta_{pi}) \tag{4.7}$$

구분 성형 패널법에서는 N개의 방정식과 N+1개의 미지수가 있기 때문에 이산화 방정식을 풀기 위해서는 1개의 식이 추가적으로 요구 되어 진다. 그래서 Fig. 4-4과 같이 날개 뒷날의 상면과 하면 패널의 접선방향 속도의 크기가 같도록 하는 Kutta 조건을 적용하여 방정식의 개수와 미지수의 개수를 같도록 하였다.

$$\left| U_{\hat{t}_N} \right| = \left| U_{\hat{t}_1} \right| \tag{4.8}$$

여기서,

$$U_{\hat{t}_N} = \frac{\phi_{N+1} - \phi_N}{l_N} + (\cos(\alpha)t_{x,N} + \sin(\alpha)t_{y,N}) \tag{4.9}$$

$$U_{\hat{t}_1} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{l_1} + (\cos(\alpha)t_{x,1} + \sin(\alpha)t_{y,1}) \tag{4.10}$$

여기서, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_N 그리고 ϕ_{N+1}은 각각 날개 뒷날 패널의 절점에서의 교란 포텐셜(perturbation potential)이다. l은 각 패널의 길이, α는 유체의 유입각이고, $\hat{t}$는 패널의 접선방향 벡터이다.

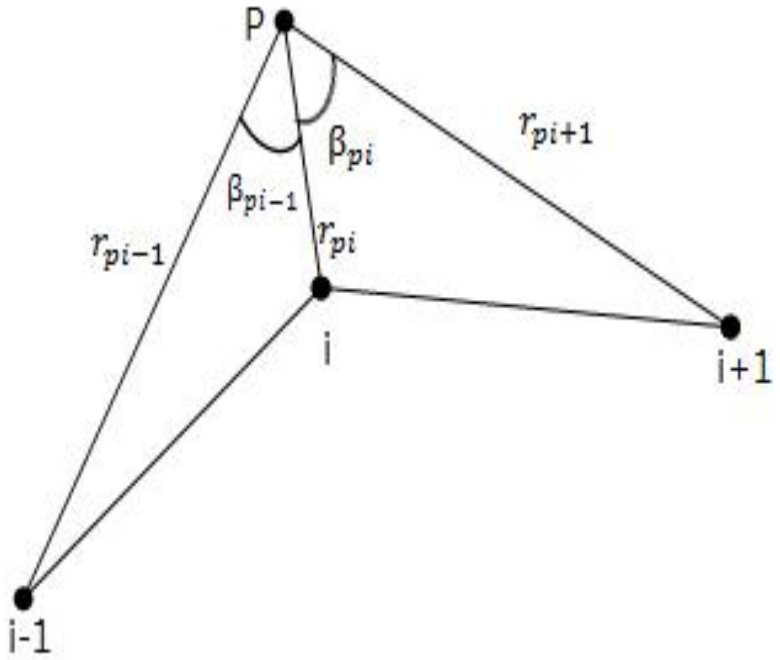

Fig. 4-3 Self-induction for a linear dipole strength panel

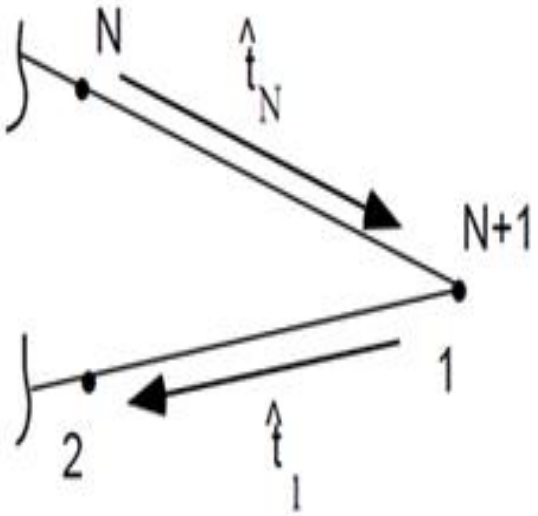

Fig. 4-4 Notation for Kutta condition at the trailing edge

4.2. 균일 강도와 구분 선형 강도 패널법의 비교

균일 강도 패널법의 경우 해석해야하는 단면의 형상에 따라 정확도가 감소하는 경우가 있다. 그래서 절점에서 패널 간 세기의 차이로 발생하는 오차를 줄이고자 시작한 구분 선형 강도의 정밀도를 받음각이 0°와 90°일 때 해석해에 대해 균일 강도 패널법의 결과와 비교하였다.

받음각이 0°일 경우 포텐셜 점프($\triangle\phi = 0$)가 일어나지 않으므로 압력계수와 비교하고, 받음각이 90°일 때는 압력계수와 Γ(Morino's gamma)를 이용하여 비교하였고, 각 수식은 다음과 같다.

$$C_P = 1-(\frac{u}{U_\infty})^2 \tag{4.11}$$

$$\triangle\phi = \phi(N+1) - \phi(1) \tag{4.12}$$

여기서, u는 접선방향 속도이고, U_∞는 날개 원방에서의 속도이다. 또, $\phi(1)$은 첫 번째 절점에서의 포텐셜 값이고, $\phi(N+1)$은 단면 마지막 절점에서의 포텐셜 값이다.

계산에 사용되어진 단면은 원형 단면, 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면은 이용하였다. 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면은 날개 뒷날의 각은 12°이고, 단면의 두께와 캠버량을 결정 짓는 원의 중심은 xc = 0.07, yc = 0.2이다.

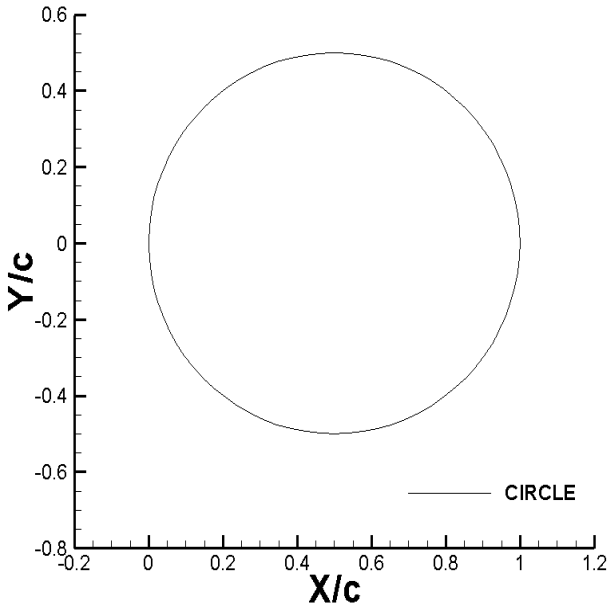

Fig. 4-5 Geometry of a circle

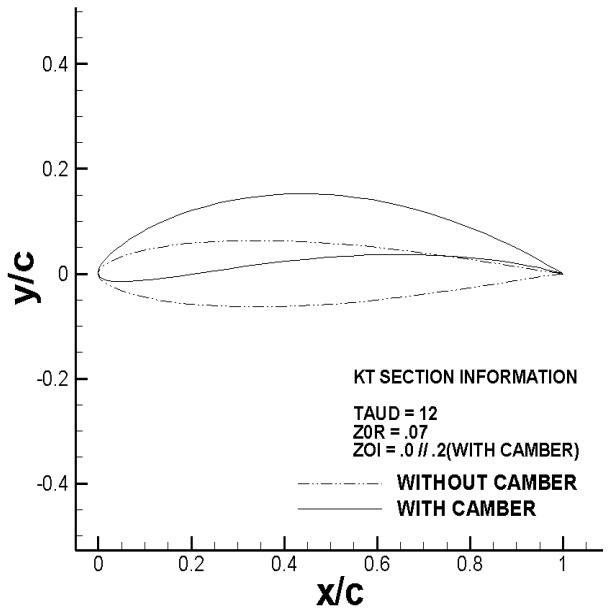

Fig. 4-6 Geometry comparison of KT sections with camber and without camber

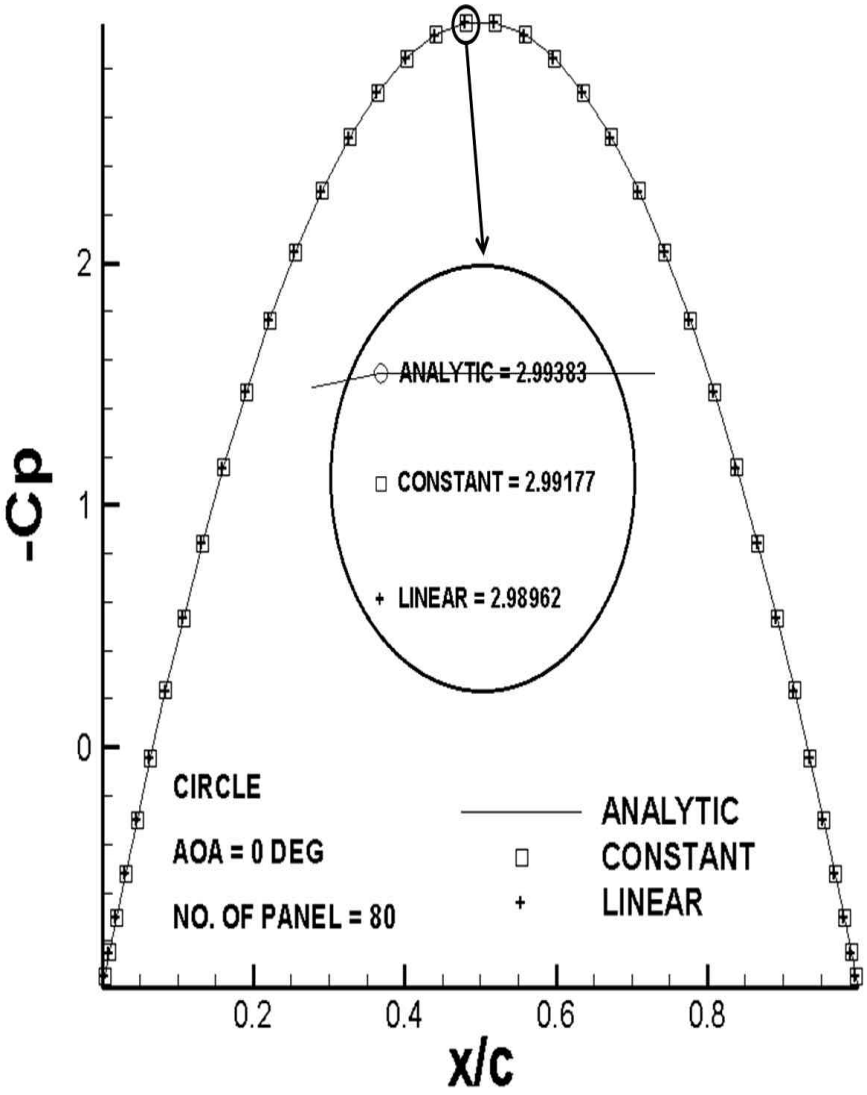

Fig. 4-7 $-C_p$ distribution for a circle at $\alpha = 0^\circ$

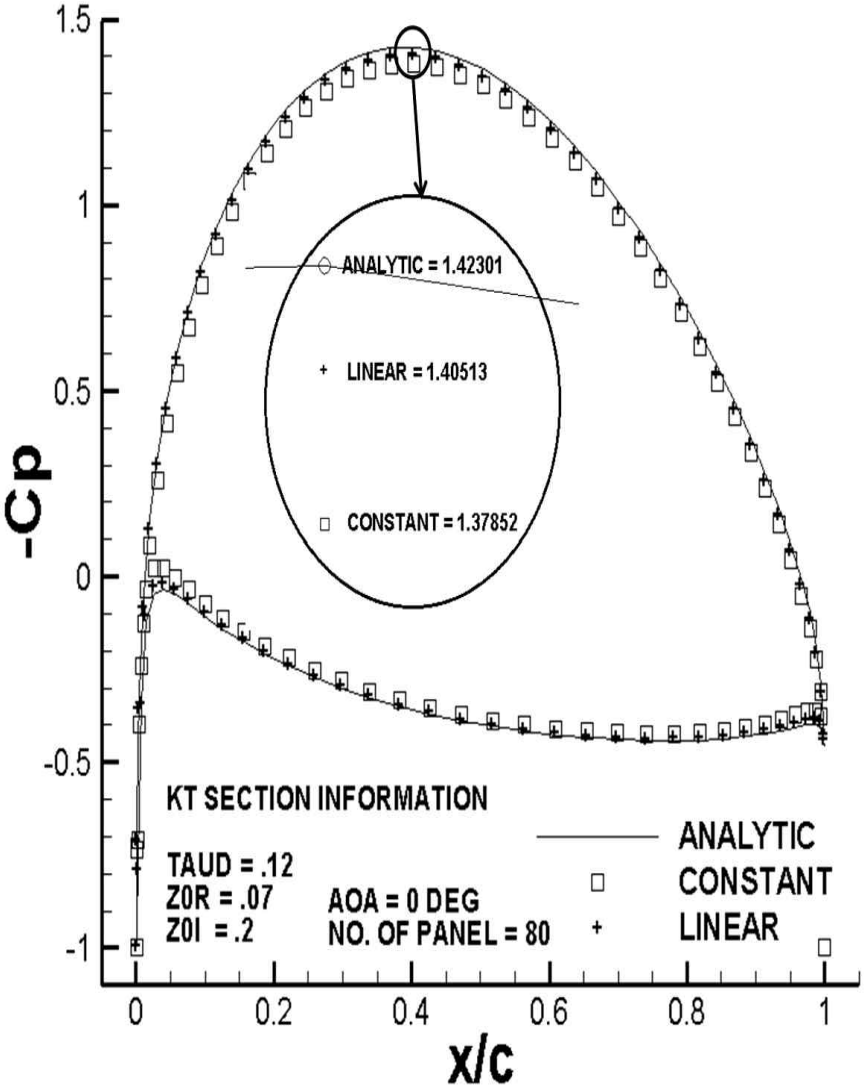

Fig. 4-8 $-C_p$ distribution for the KT section with camber at $\alpha = 0^\circ$

Table 4-1 Results of the $-C_P$ maxium values by various panel methods at α = 0°

	CIRCLE	KT SECTION WITH CAMBER
ANALYTIC	2.99383	1.42301
CONSTANT	2.99177	1.37852
LINEAR	2.98962	1.40513

Fig. 4-7는 원형 단면을 이용하여 받음각이 0°일 때 압력계수에 대한 그래프이다. 기존의 균일 강도 패널법과 구분 선형강도 패널법 모두 해석해를 잘 쫓아가는 것을 볼 수 있었고, 압력계수의 최소값을 이용하여 정밀도를 비교하였다. Fig. 4-8는 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면을 이용하여 받음각이 0°일 때 압력계수에 대한 그래프이다. 최소값 부근을 확대시켜 놓은 부분을 통해 단면이 대칭성 없이 복잡하여 지는 경우 기존의 균일 강도 패널법보다 선형 강도 패널법이 해석해를 훨씬 더 잘 쫓아가는 것을 확인 할 수 있다.

Table 4-1은 원형 단면과 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면에 대해 받음각이 0°일 때 얻어진 압력계수 그래프에서 최소값을 해석해, 균일 강도, 구분 선형 강도 패널법의 순으로 정리한 표이다. 캠버가 들어간 경우 해석해 대비 균일 강도 패널법의 오차는 3.12%이나 구분 선형 강도 패널법의 경우 1.256%로 오차가 1.87% 가량 감소한 것을 확인 할 수 있다.

다음으로는 동일한 단면에 대해 받음각이 90°일 때 압력계수와 포텐셜 점프를 어용한 경계조건으로부터 Γ를 구하여 정밀도를 비교하였다.

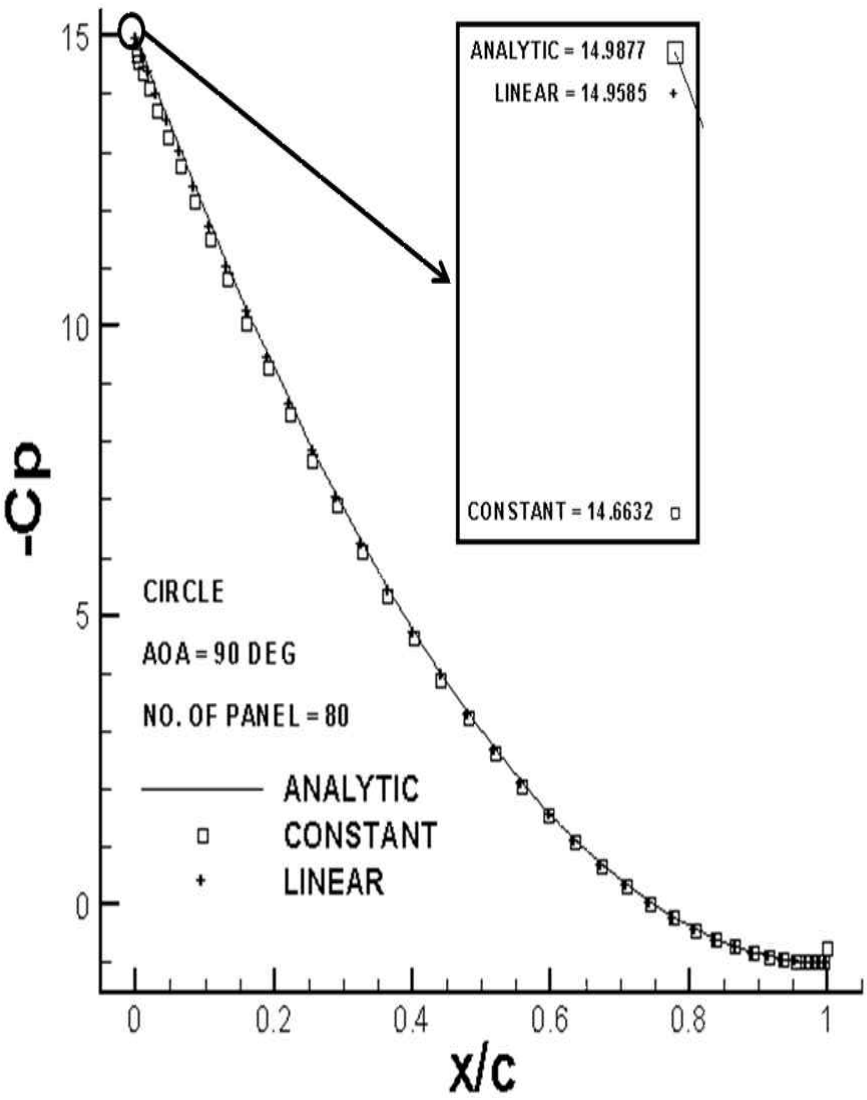

Fig. 4-9 $-C_p$ distribution for a circle at $\alpha = 90^\circ$

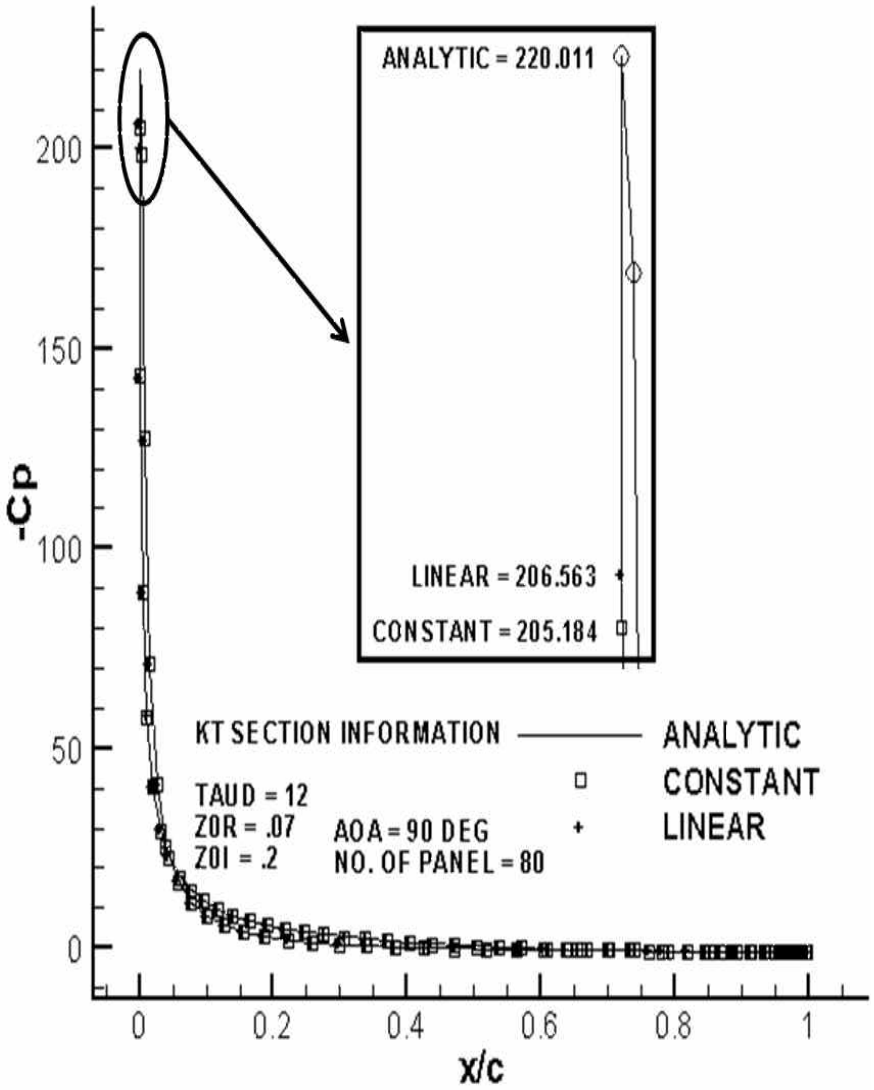

Fig. 4-10 $-C_p$ distribution for the KT section with camber at $\alpha = 90^\circ$

Table 4-2 Results of the $-C_P$ maximum values by various panel methods at α = 90°

	CIRCLE	KT SECTION WITH CAMBER
ANALYTIC	14.9877	220.011
CONSTANT	14.6632	205.184
LINEAR	14.9585	206.563

Fig. 4-9은 원형 단면을 이용한 압력계수에 대한 그래프이다. 받음각이 90°인 경우, 특수한 단면임에도 불구하고 확대한 부분을 통해 구분 선형 강도 패널법이 균일 강도 패널법에 비해 해석해에 대하여 더 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다. Fig. 4-10은 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면을 이용한 압력계수를 정리한 그래프이가. Fig. 25와 같이 날개의 앞날에서 균일 강도 패널법 구분 선형 강도 패널법 모두 $-C_P$에 대한 최고값과 차이를 보이는 것을 확인 할 수 있다. 그러나 구분 선형 강도 패널법이 여전히 균일 강도 패널법에 비해 해석해에 대해 더 잘 일치하는 것을 확인 할 수 있다.

Table 4-2는 원형 단면과 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면에 대해 받음각이 90°일 때 얻어진 최소 압력계수를 해석해, 균일 강도 패널법, 구분 선형 강도 패널법의 순으로 정리한 표이다. 원형 단면의 경우, 균일 강도 패널법의 오차는 2.165%이고, 구분 선형 강도 패널법의 오차는 0.195%인 것을 통해 오차가 1.97% 감소한 것을 확인 할 수 있다.

Table 4-3 Results of the Γ values by variouse panel methods at α = 90°

	CIRCLE	KT SECTION WITH CAMBER
ANALYTIC	6.28319	3.45957
CONSTANT	6.21717	3.39717
LINEAR	6.27342	3.43823

Table 4-3는 원형 단면과 캠버가 있는 Karman-Trefftz 단면에 대해 받음각이 90°일 때 얻어진 Γ를 해석해, 균일 강도 패널법, 구분 선형 강도 패널법 순서로 정리한 표이다. 원형 단면의 경우 해석해에 대

하여 균일 강도 패널법의 오차는 1.051%이고, 구분 선형 강도 패널법의 오차는 0.155%로 오차가 0.896% 줄어든 것을 확인 할 수 있다. Karman-Trefftz 단면에 대해서는 해석해에 대한 균일 강도 패널법의 오차는 1.804%이고, 구분 선형강도 패널법의 오차는 0.667%인 것을 통해 오차가 1.137% 감소한 것을 확인 할 수있다.

5. 3차원 양력체 계산 결과

5.1. 양력이 없는 원형 날개

유체의 입사각이 영도일 경우에 대해 간단한 형상에 대해 해석해와 비교하였고, u와 v의 방향에 대한 정의는 Fig. 5-1에 나타 내었다.

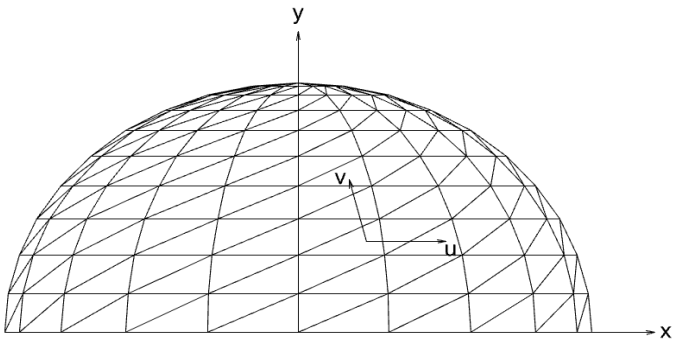

Fig. 5-1 Local u-v coordinate system

5.1.1. 구 주변 유동

구의 형상은 각 축으로 a=b=c=1을 반경으로 Fig. 5-2에 나타내었다.

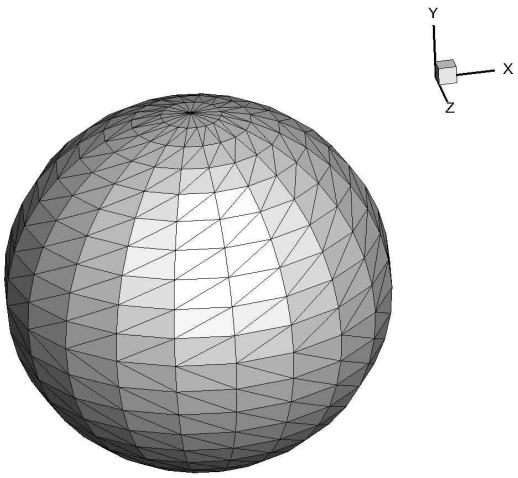

Fig. 5-2 Panel arrangement for a Sphere
(N_c=20, M_r=10, a=b=c=1)

해석해와의 비교는 chord방향과 span방향으로 포텐셜, u 방향의 속도 v 방향의 속도 그리고 chord방향으로 $-C_p$에 대해 각각 비교하였다. u방향은 chord방향이고, v방향은 날개의 끝단을 향하는 방향이다. Fig. 5-3에서 Fig. 5-9까지에 순서대로 나타내었다. x축은 각 방향 둘레의 길이를 무차원화 하여 나타 내었다. Chord 방향에서 x축의 영 은 날개 뒷날의 아랫면, 0.5는 날개의 앞날 그리고 1.0은 날개 뒷날의 윗면이다. Span 방향에서 x축의 영은 구의 중앙($r/R=0.0$)이고, 1.0은 구의 끝부분이다. 도시는 chord방향과 span방향으로 각각 5개씩 나타내었다.

Fig. 5-3과 Fig. 5-4에 도시한 포텐셜에 대한 비교를 보면 해석해와 본 논문에서 시도한 부분선형 강도 패널법에 의한 결과가 매우 잘 일치 하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5-5에서 Fig. 5-8에 도시한 u방향과 v방향 속도의 chord와 span방향의 각각의 결과도 포텐셜과 마찬가지로 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 이로 보아 3절에서 제시한 접선벡터를 구하는 방법과 속도를 구하는 방법이 타당함을 확인 할 수 있다.

Fig. 5-9에 도시한 $-C_p$의 결과 또한 해석해와 매우 잘 일치함을 알 수 있고 계산의 방법이 타당함을 확인 할 수 있다.

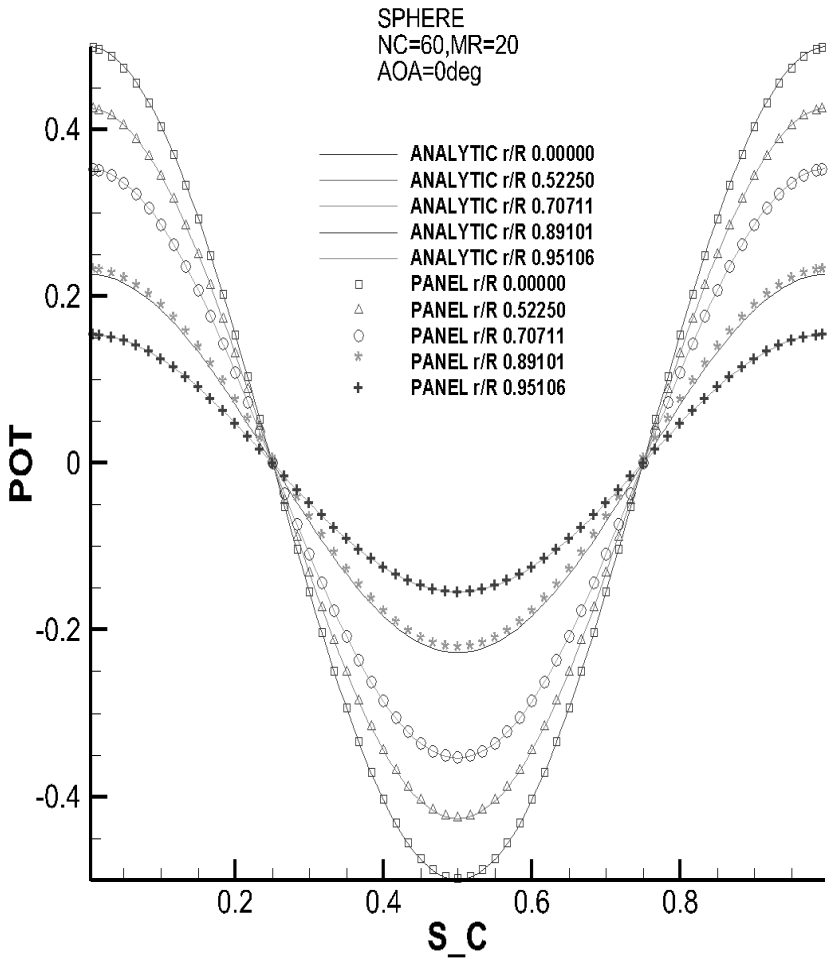

Fig. 5-3 Chordwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

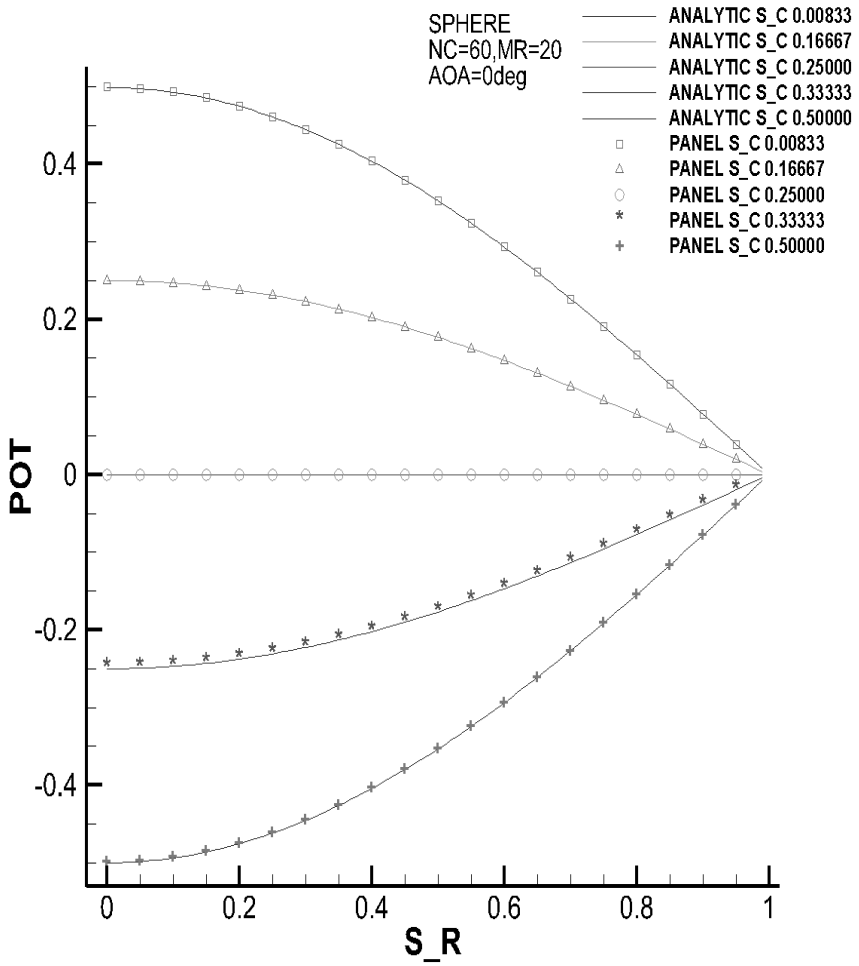

Fig. 5-4 Spanwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

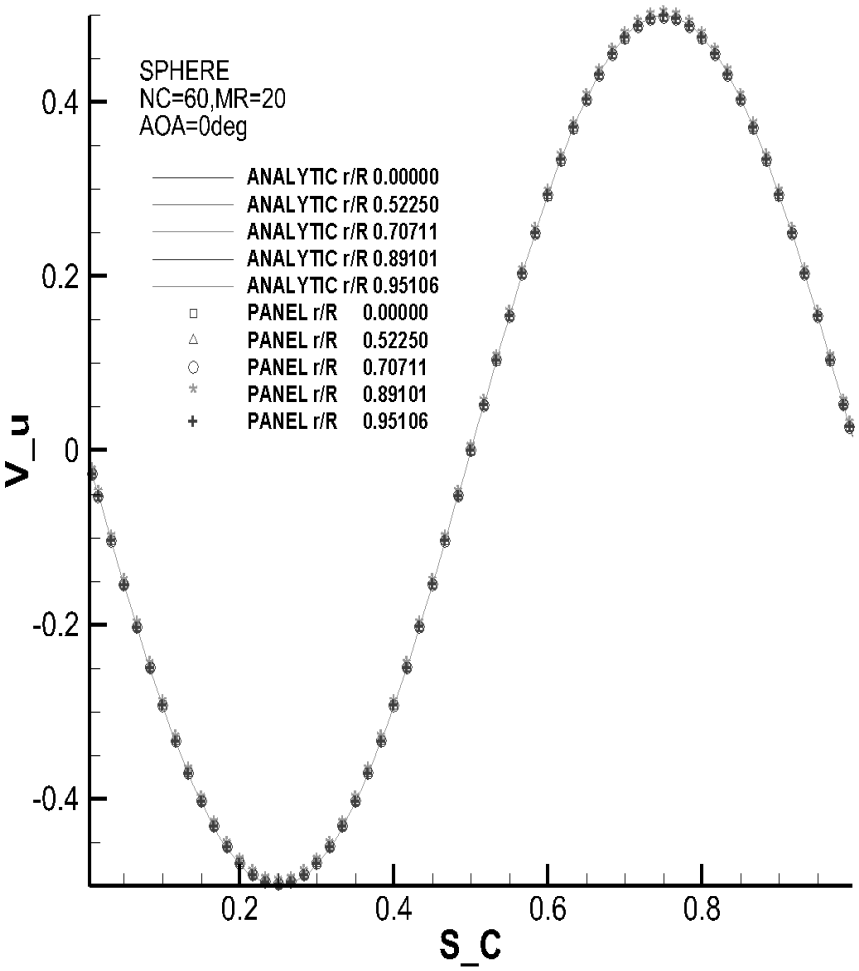

Fig. 5-5 Chordwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

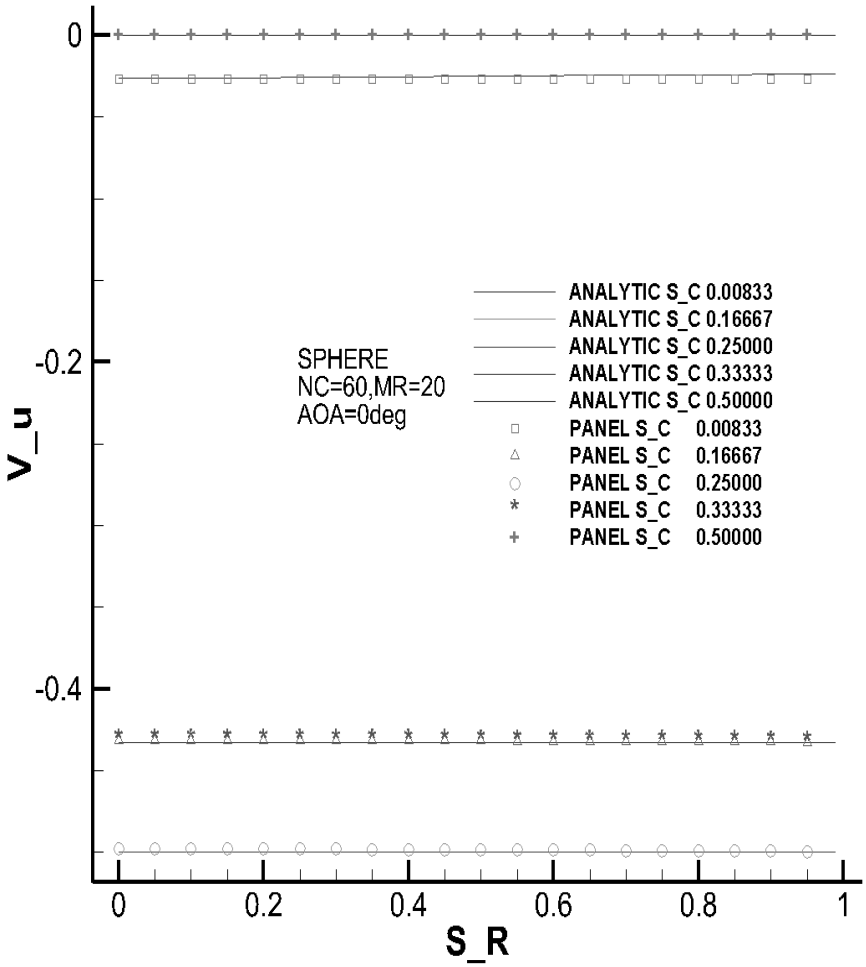

Fig. 5-6 Spanwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

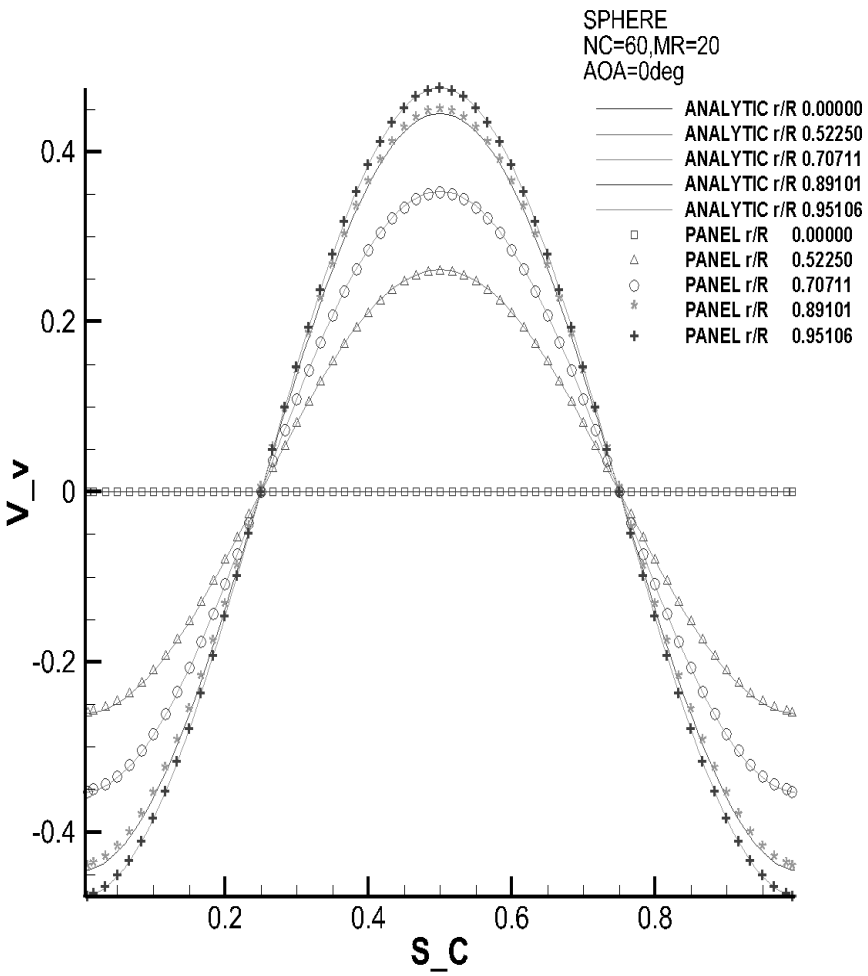

Fig. 5-7 Chordwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

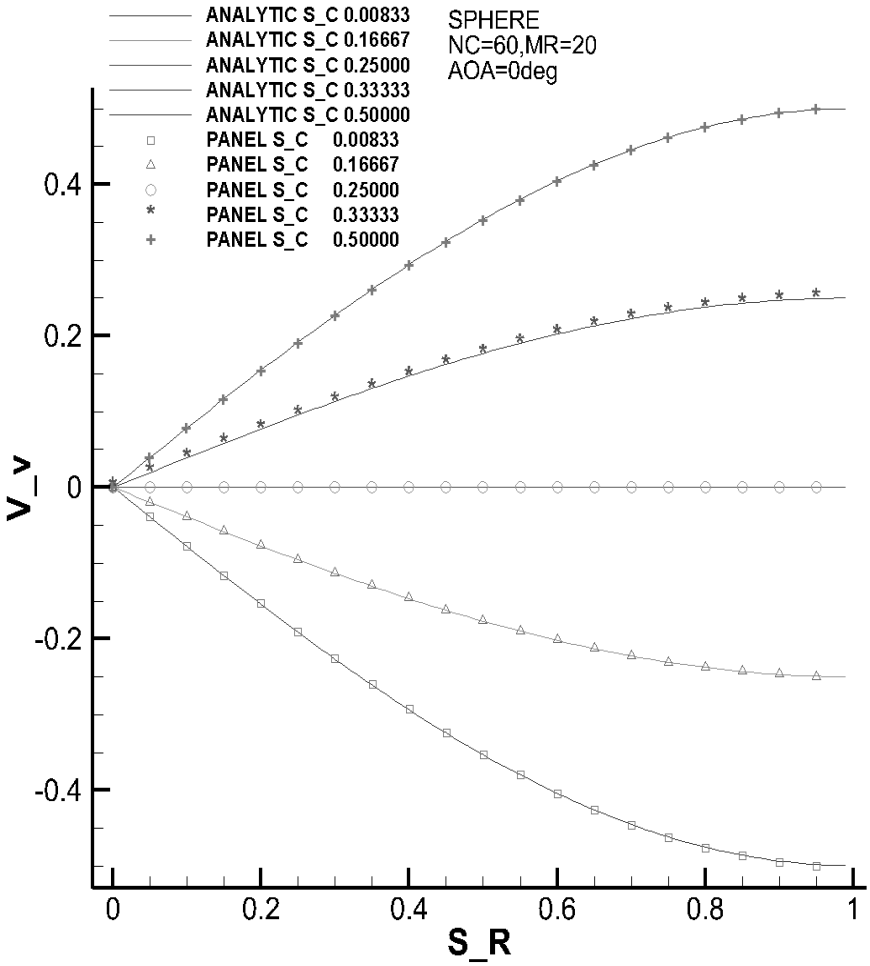

Fig. 5-8 Spanwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

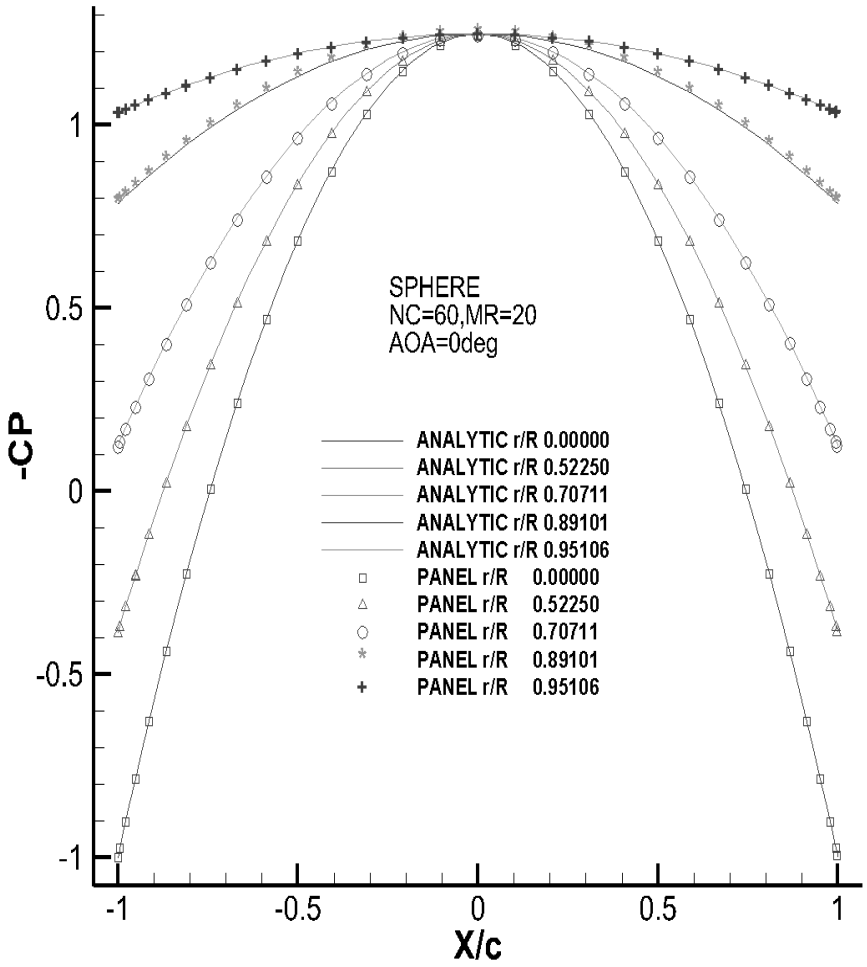

Fig. 5-9 Chordwise $-C_p$ distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

5.1.2. 타원체 주변 유동

타원체의 형상은 각 축방향으로 a=b=1.0, c=0.1을 반경으로 한다. c=0.1은 타원체의 두께가 chord방향 길이의 10%임을 의미하고 Fig.5-10에 나타 내었다.

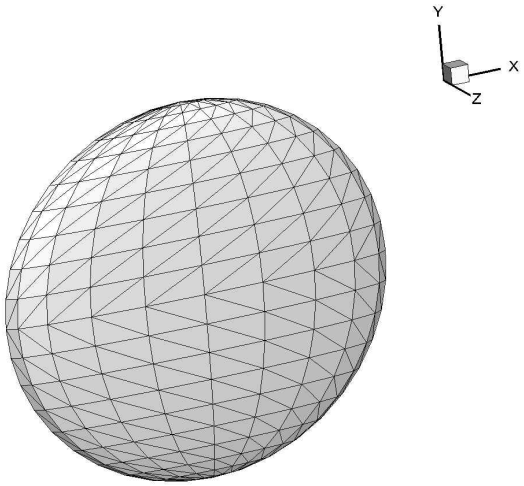

Fig. 5-10 Geometry representation of a Ellipsoid(N_c=20, M_r=10, a=b=1, c=0.1)

해석해와의 비교는 chord방향과 span방향으로 포텐셜, u 방향의 속도 v 방향의 속도 그리고 chord방향으로 $-C_p$에 대해 각각 비교하였다. u방향은 chord방향이고, v방향은 끝을 향하는 방향이다. Fig. 5-11에서 Fig. 5-18까지에 순서대로 나타내었다. x축은 각 방향 둘레의 길이를 무차원화 하여 나타 내었다. Chord 방향에서 x축의 영 은 날개 뒷날의 아랫면, 0.5는 날개의 앞날 그리고 1.0은 날개 뒷날의 윗면이다. Span 방향에서 x축의 영은 타원체의 중앙($r/R=0.0$)이고, 1.0은 타원체의 끝부분이다. 도시는 chord방향과 span방향으로 각각 5개씩 나타내었다.

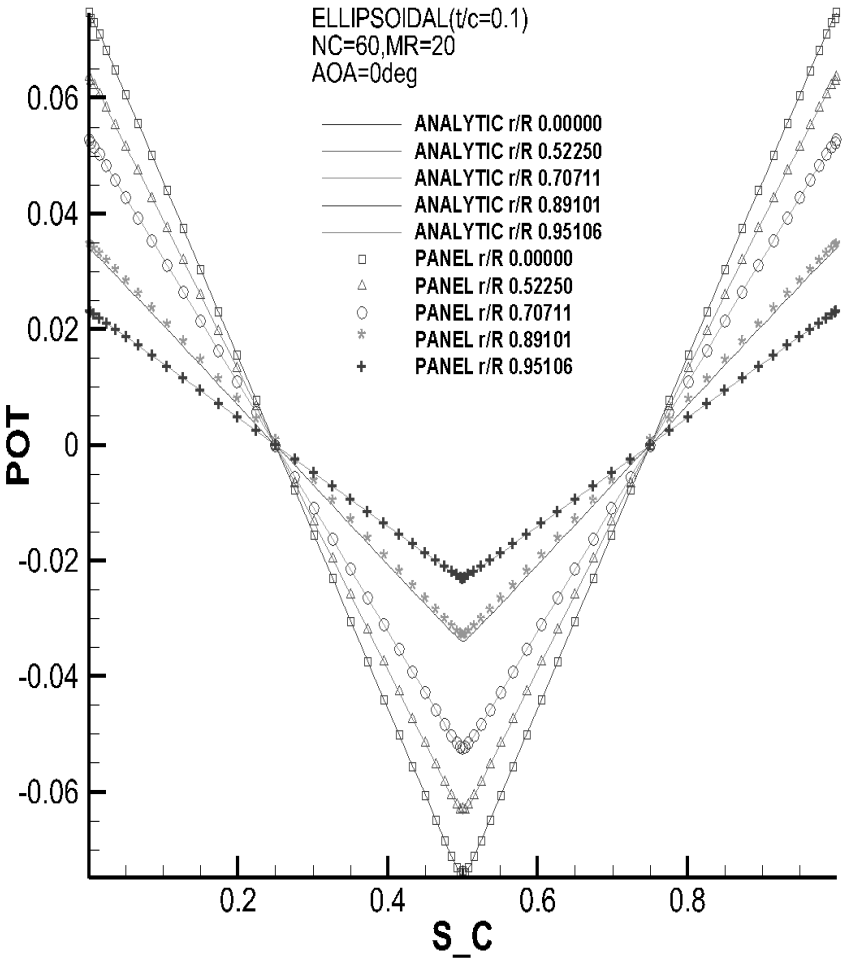

Fig. 5-11 Chordwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

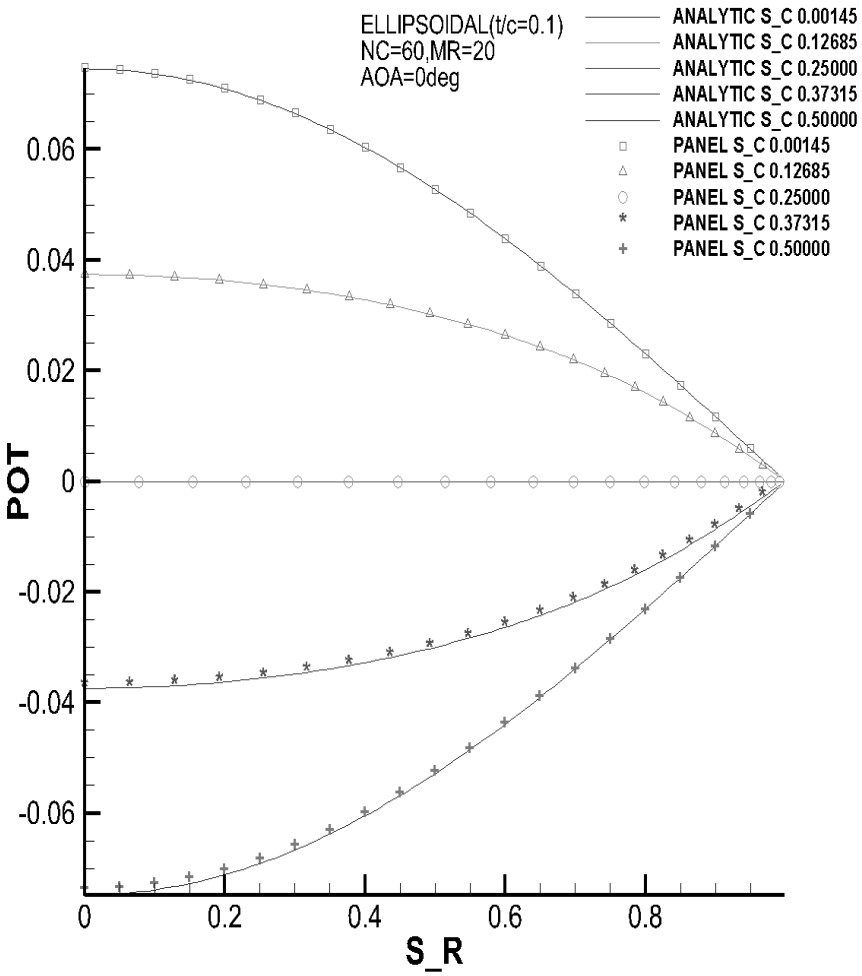

Fig. 5-12 Spanwise potential distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

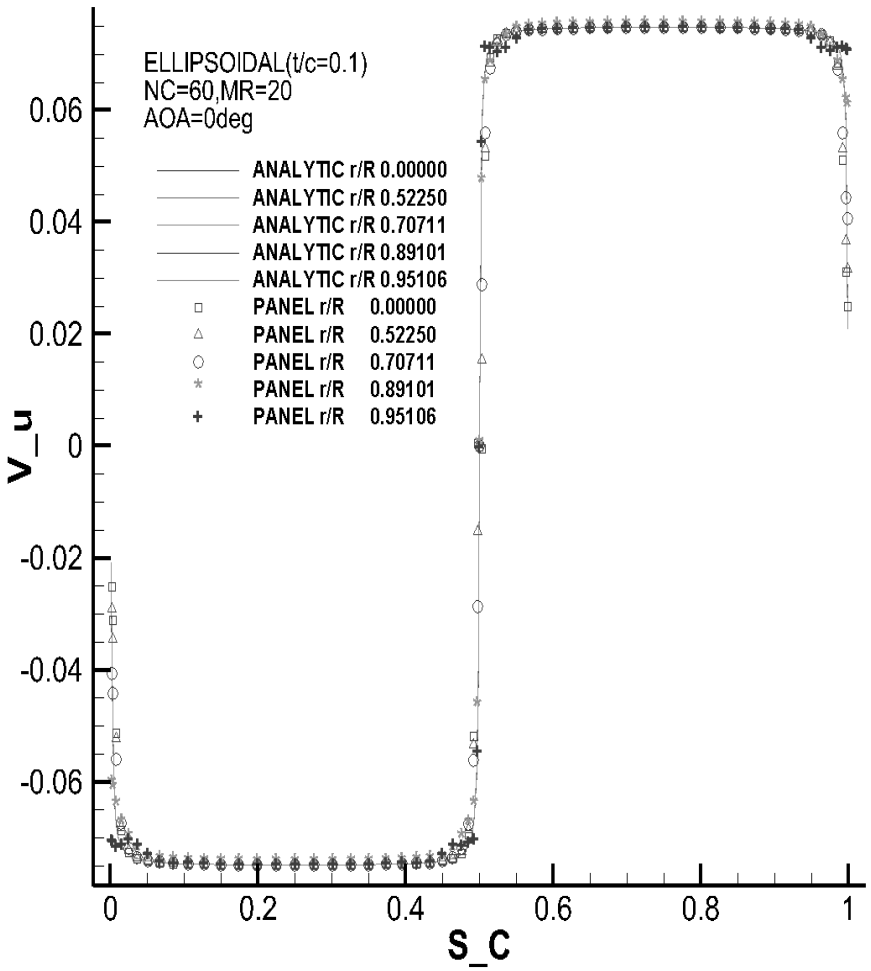

Fig. 5-13 Chordwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

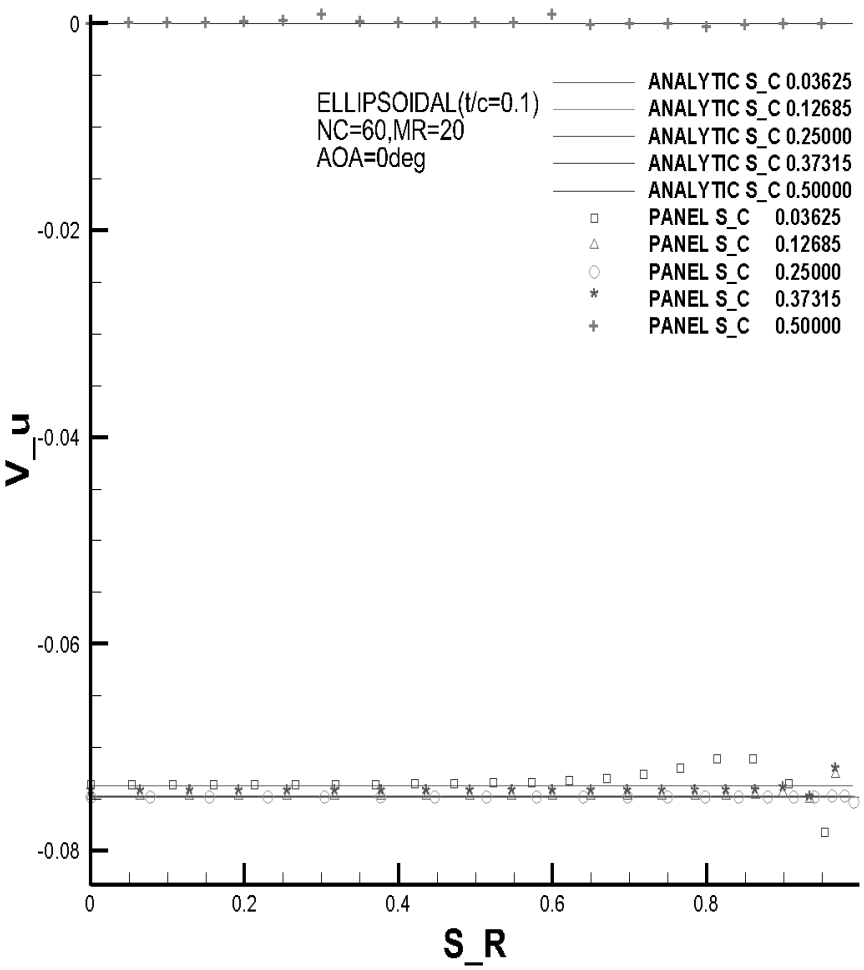

Fig. 5-14 Spanwise u-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

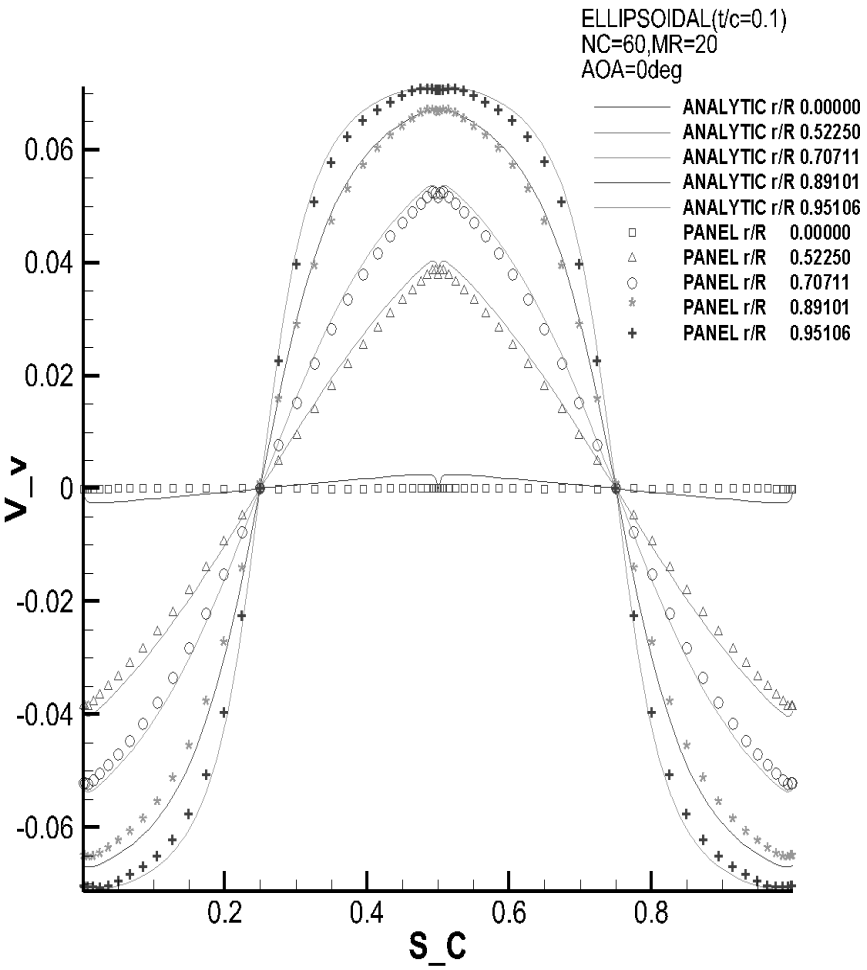

Fig. 5-15 Chordwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

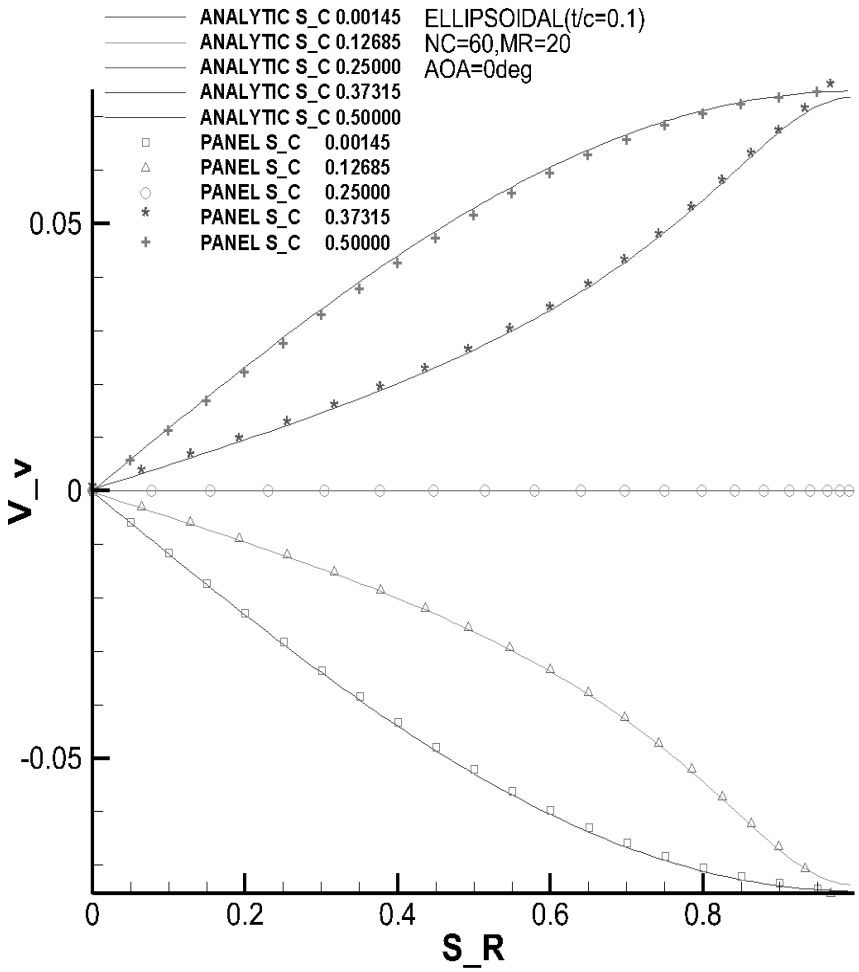

Fig. 5-16 Spanwise v-direction velocity distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

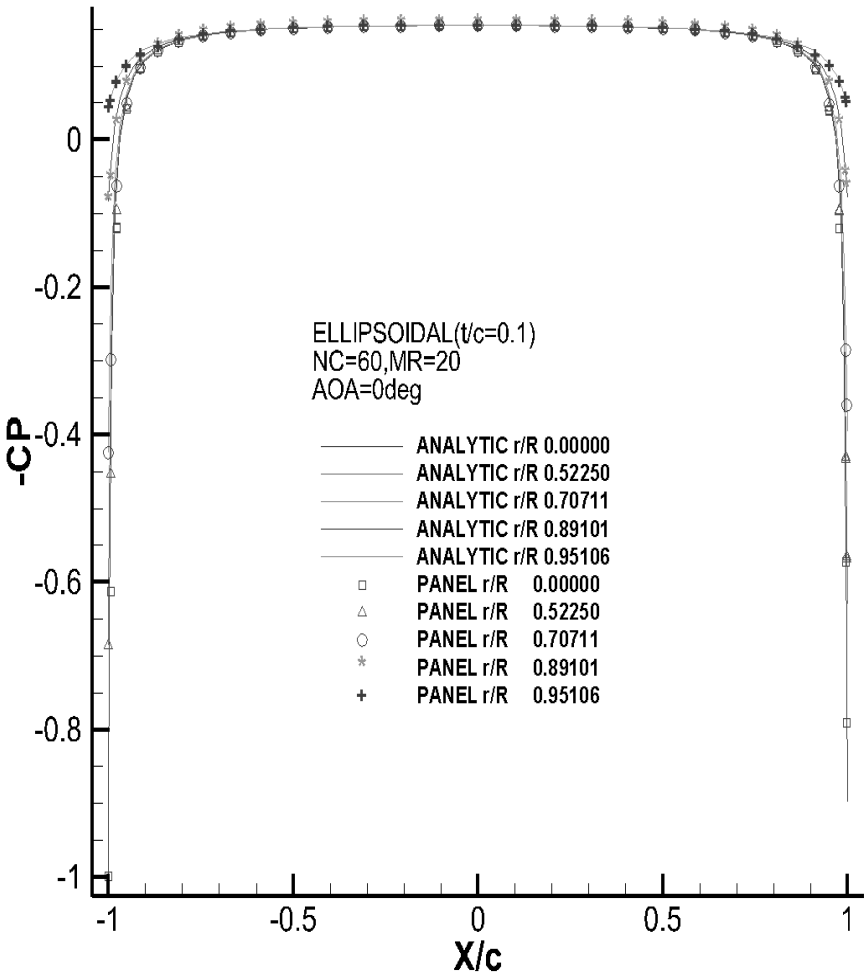

Fig. 5-17 Chordwise $-C_p$ distribution compared with the analytic solution(N_c=60, M_r=20, α=0°)

Fig. 5-11와 Fig. 5-12에 도시된 포텐셜은 대체적으로 잘 맞고 있음을 확인 할 수 있다. 하지만 Fig. 5-13에서 Fig. 5-16의 u방향 속도와 v방향 속도를 보면 날개의 앞날과 날개의 뒷날에서 해석해와의 약간의 차이를 보이고 있다. 차이가 나는 이유는 패널의 배치와 관련이 있다고 보여 진다.

본 논문에서는 균일 강도 패널법과는 달리 패널의 절점에 특이점이 존재한다. 이는 패널간 특이점 강도의 불연속은 피할 수 있지만 패널의 개수에 많은 영향을 받는 결과를 가져다주었다. 특히 날개의 앞날과 뒷날에서와 같이 작은 반경으로 이루어진 물체의 경우 그 반경을 잘 따라 갈 수 있는 패널의 배치가 필요하다.

패널 배치에 따른 포텐셜 값의 변화를 2차원 단면을 통해 확인 하였고, Fig. 5-18에 나타 내었다.

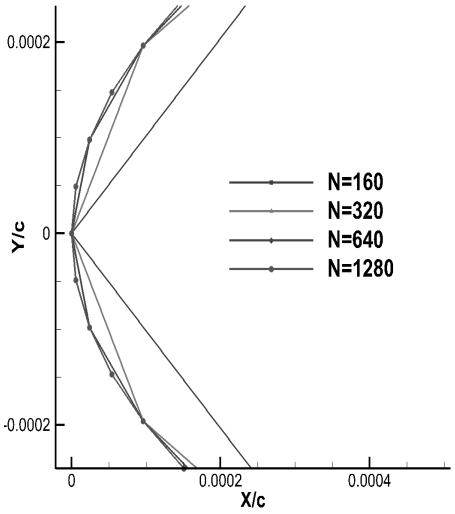

Fig. 5-18 Leading edge representation as the number of panels increases

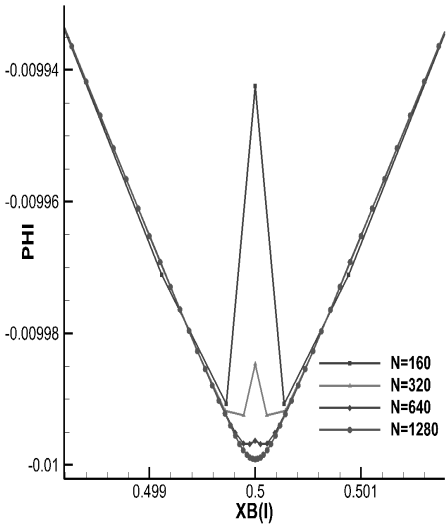

Fig. 5-19 Potential distribution near the leading edge as the number of panels increases

Fig. 5-18와 Fig. 5-19에서 보듯이 자기 유도 계수가 충분히 수렴할 만큼 패널을 배치하게 되면 좋은 결과가 나옴을 알 수 있다.

본 논문 에서는 Fig. 5-17의 $-C_p$의 결과에서 보듯 오차의 영향이 미미할 만큼 패널이 충분하다고 판단된다.

5.2. 세장비가 큰 날개

계산 검증을 위해 세장비가 큰 날개에 대한 계산을 진행 하였다. 날개의 단면은 NACA 단면을 선택하였다. 단면은 대칭단면과 캠버가 있는 단면을 사용하였다. 대칭 단면은 두께가 10%인 NACA 0010, 캠버가 있는 단면은 NACA 66 a=0.8(t/c=0.1, f/c=0.04)를 택하였다.

3차원의 날개가 무한히 길다고 가정하면 2차원과 같아진다. 날개의 길을 chord길이의 10배가 되면 충분히 무한다고 보고, chord와 반경의 비를 10으로 하였다. 비교 대상이 되는 2차원 날개 단면에 대한 계산은 4절에서 검증한 부분 선형 패널법을 사용하였다.

2차원 날개 단면의 패널 개수는 80개, 3차원 날개 단면의 개수, N_c는 60개이고, M_r은 20이다. 입사각은 대칭단면일 경우 0°와 10°인 경우에 대해 계산하였고, camber가 있는 단면의 경우는 0°에 대해서만 계산하였다. 결과의 비교는 포텐셜과 압력에 대해서 하였다.

입사각이 생기게 되면 포텐셜 점프가 발생하게 됨으로 날개 뒷날에서 후류면을 필요로 하게 된다. 후류면의 경우 입사각에 영향을 받아 날개와 조금 떨어진 곳에서는 입사각과 같은 각도가 된다. 그리고 camber가 있는 단면의 경우 후류면은 날개 뒷날의 아래와 위 패널의 가운데를 지나도록 한다.

Fig. 5-20에 대칭 단면을 갖는 날개와 입사각이 10°일 경우의 후류면을 나타내었고, Fig. 5-21에는 camber가 있는 단면에 대한 날개와 입사각이 0°일 때 후류면을 나타내었다. Fig. 5-22에서부터 Fig. 5-27까지 대칭단면의 α=0°, 10°의 결과와 camber가 있는 단면의 순서로 비교 결과를 도시하였다.

결과를 확인하기 전에 chord방향과 span방향으로의 수렴성을 확인하였다. Fig. 5-22의 chord방향 수렴성 결과 N_C는 60, Fig. 5-23의 span방향 수렴성 결과 M_r은 20개가 적당함을 알 수 있고, 계산은 N_c=60 M_r=20을 기준으로 계산을 진행 하였다.

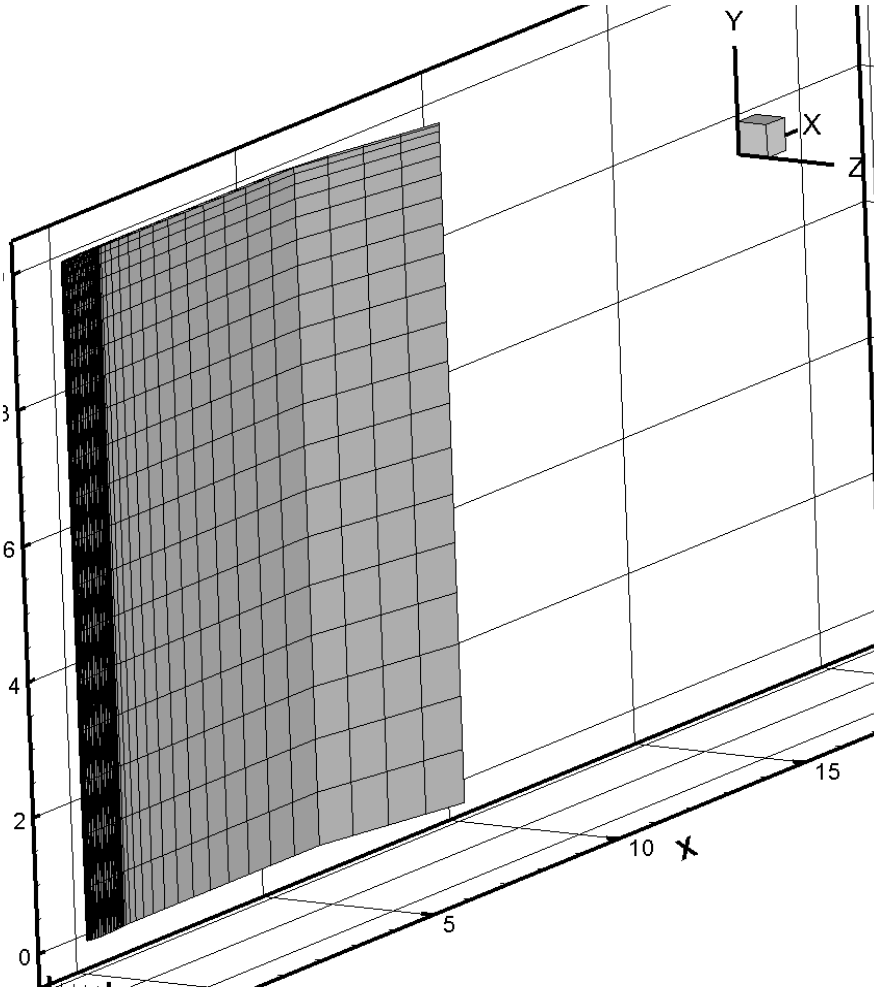

Fig. 5-20 High aspect ratio wing with NACA 0010 and wake surface
(N_c=60, M_r=20, aspect ratio=10, α=10°)

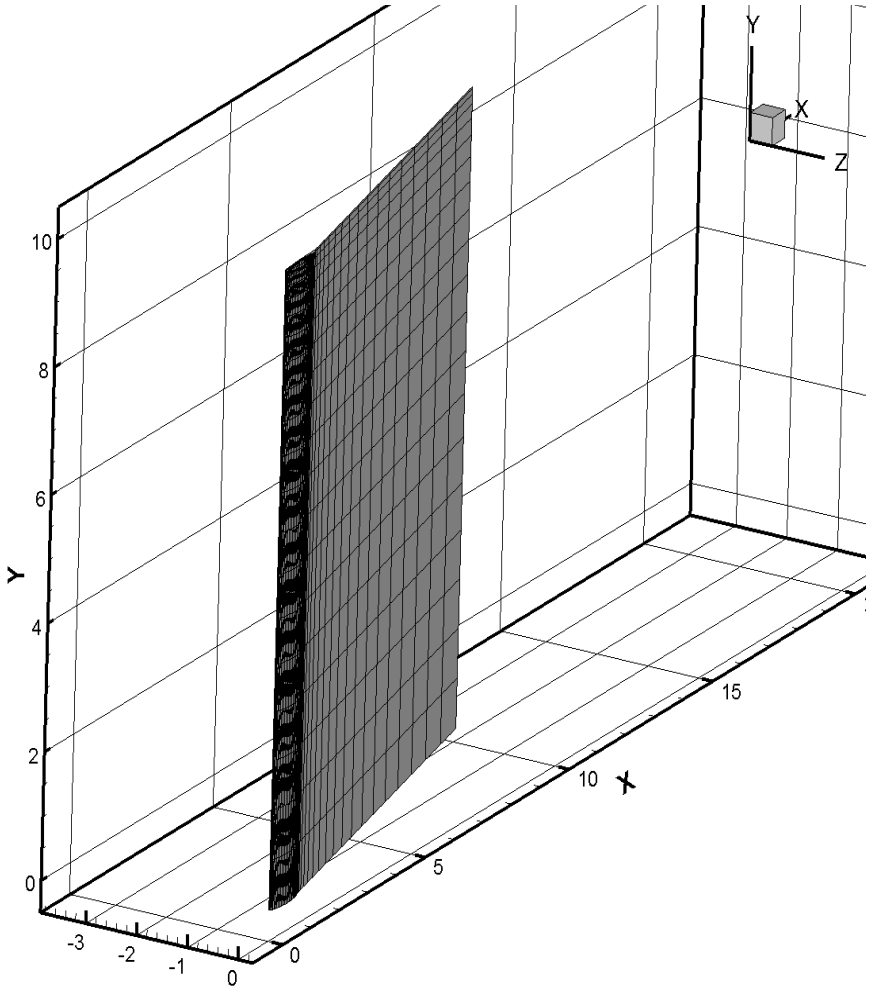

Fig. 5-21 High aspect ratio wing with NACA 66 a=0.8(t/c=0.1, f/c=0.04) and wake surface(N_c=60, M_r=20, aspect ratio=10, α=0°)

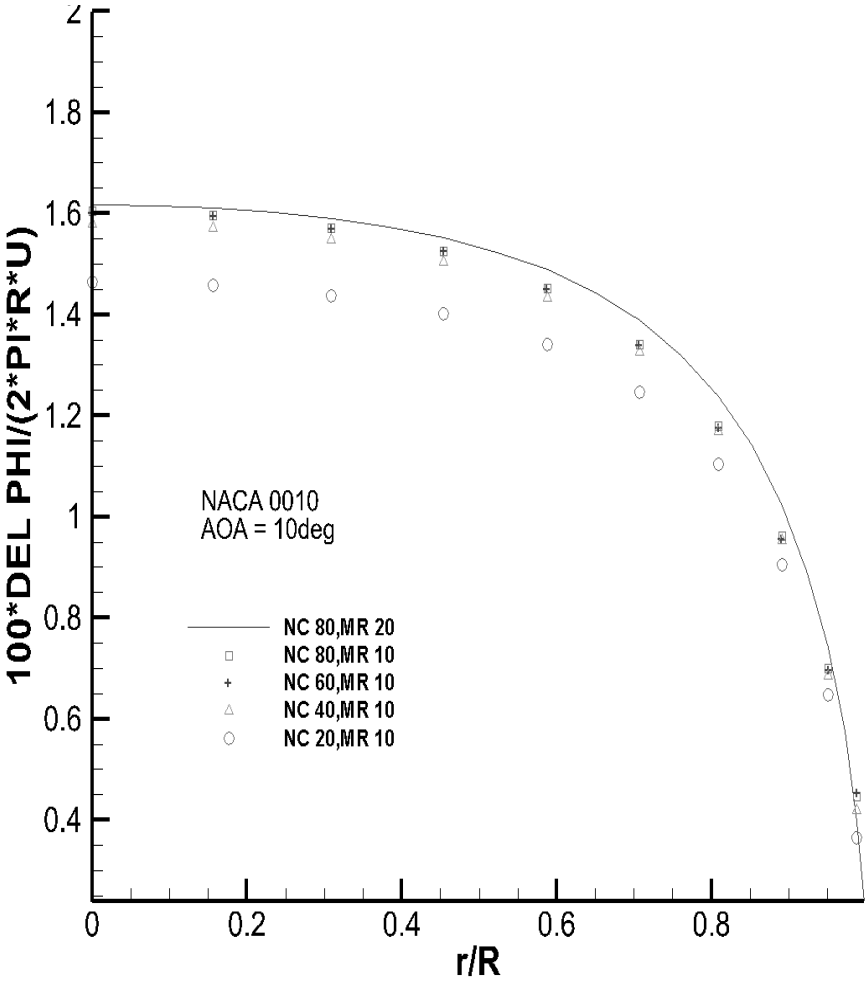

Fig. 5-22 Chord-direction convergence test for the high aspect ratio wing (NACA 0010, α=10°)

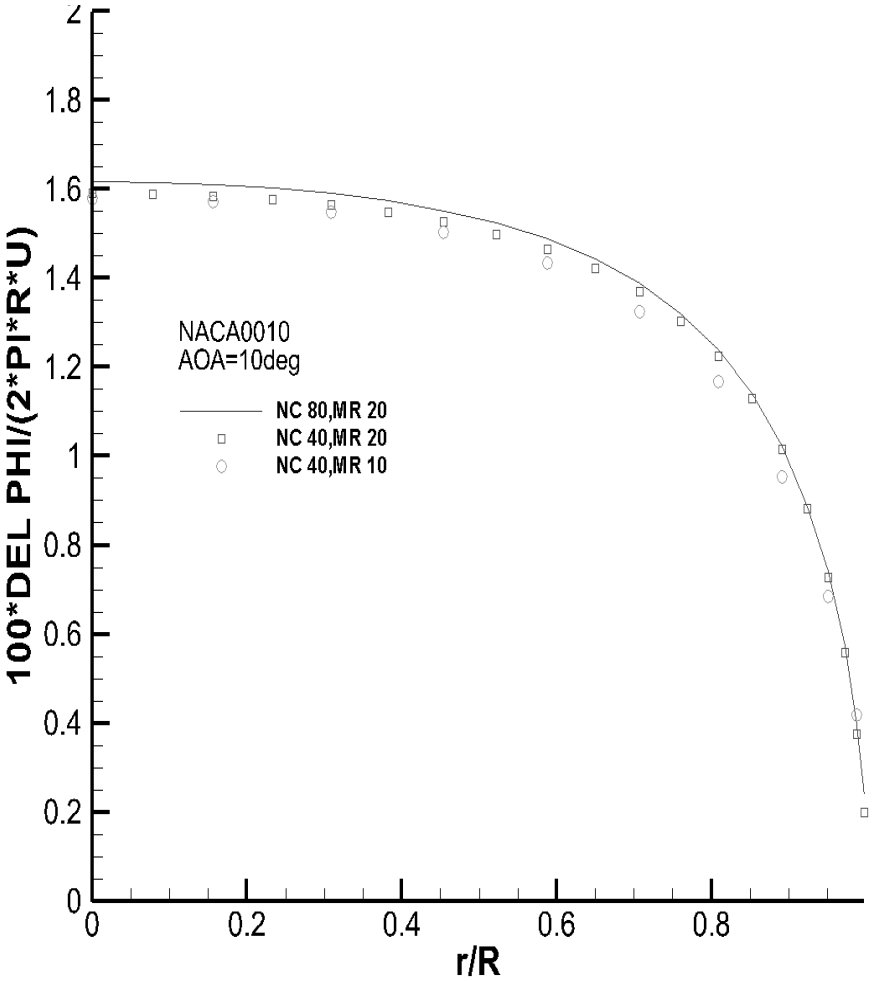

Fig. 5-23 Span-direction convergence test for the high aspect ratio wing (NACA 0010, α=10°)

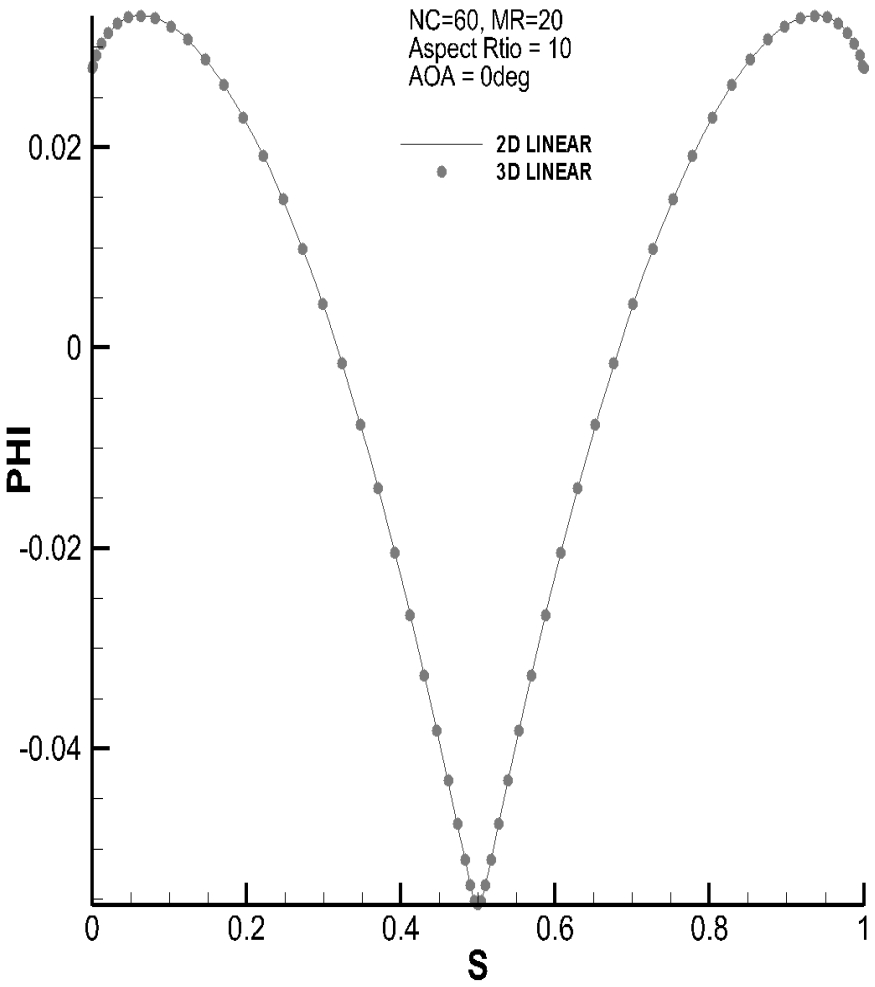

Fig. 5-24 Potential distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=0°)

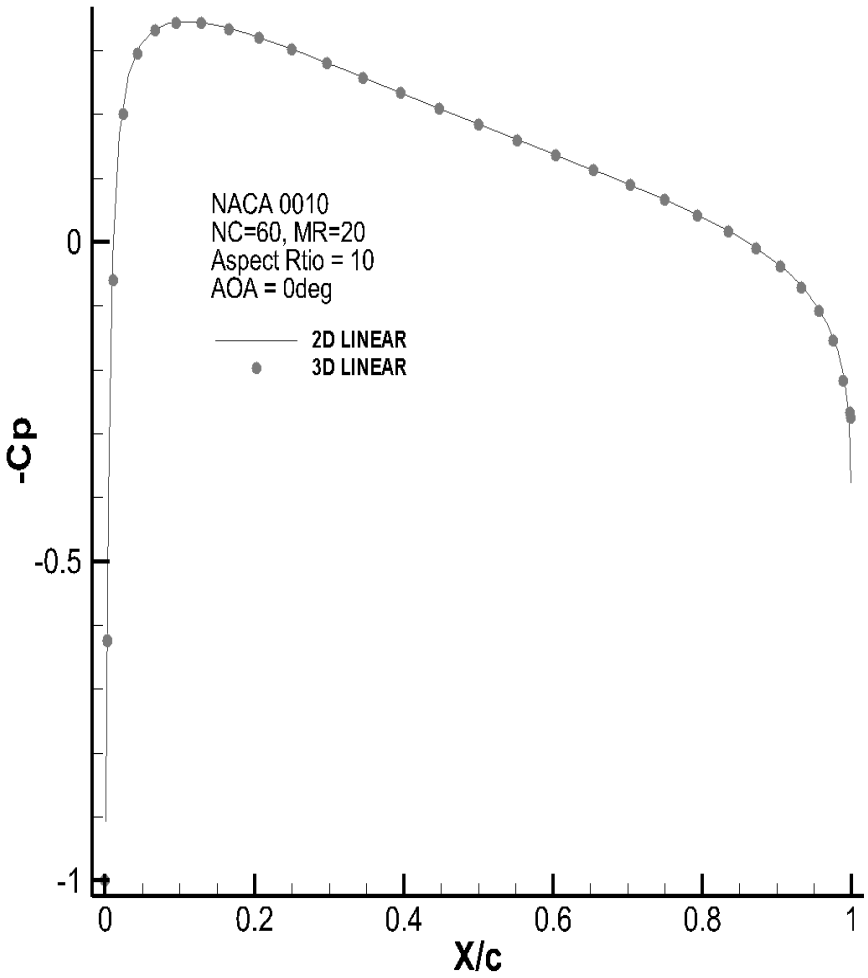

Fig. 5-25 – C_p distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=0°)

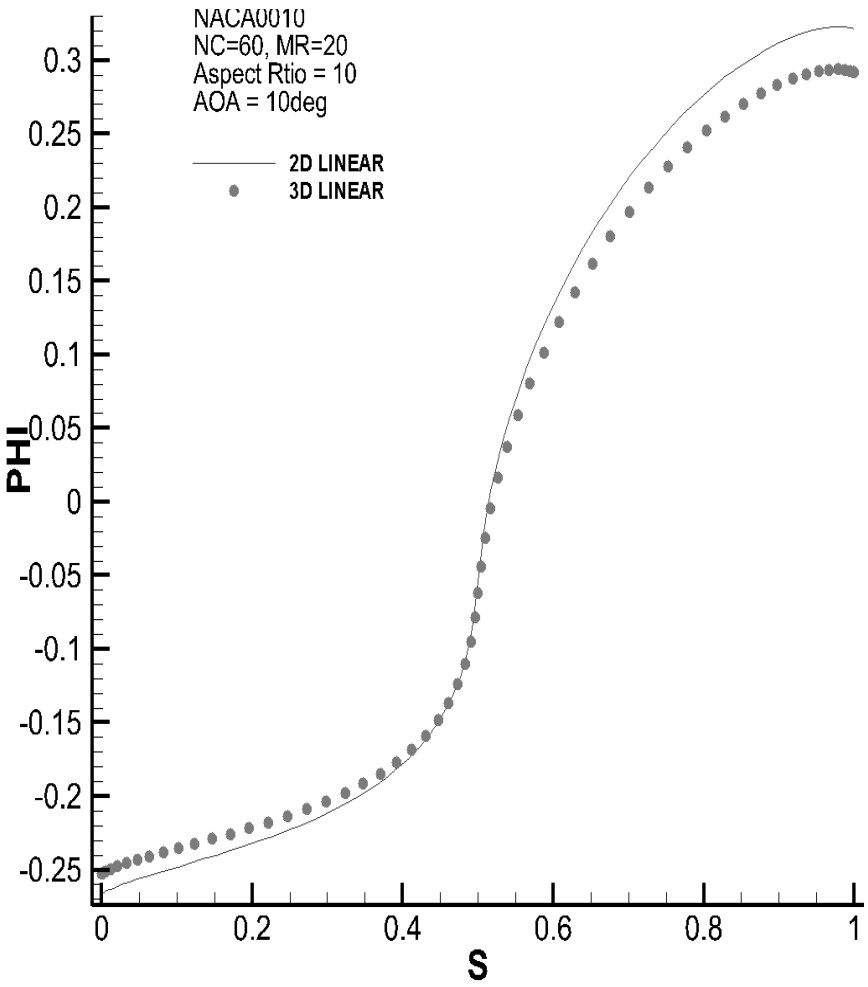

Fig. 5-26 Potential distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=10°)

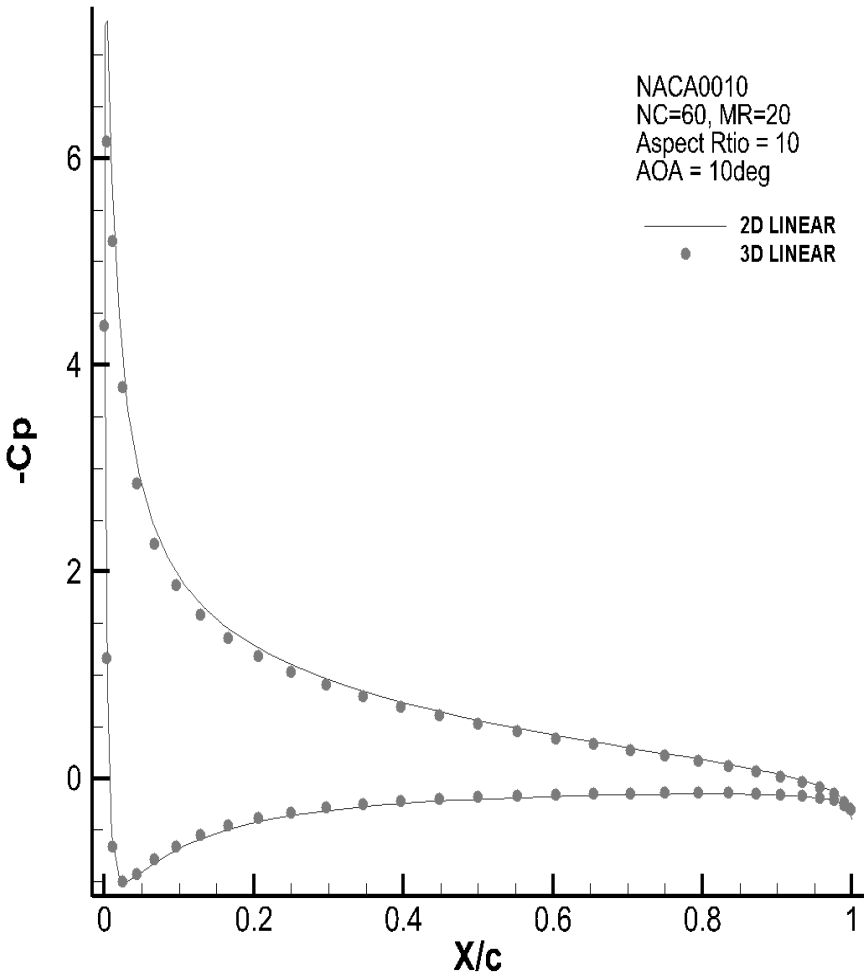

Fig. 5-27 – C_p distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 0010, N_c=60, M_r=20, α=10°)

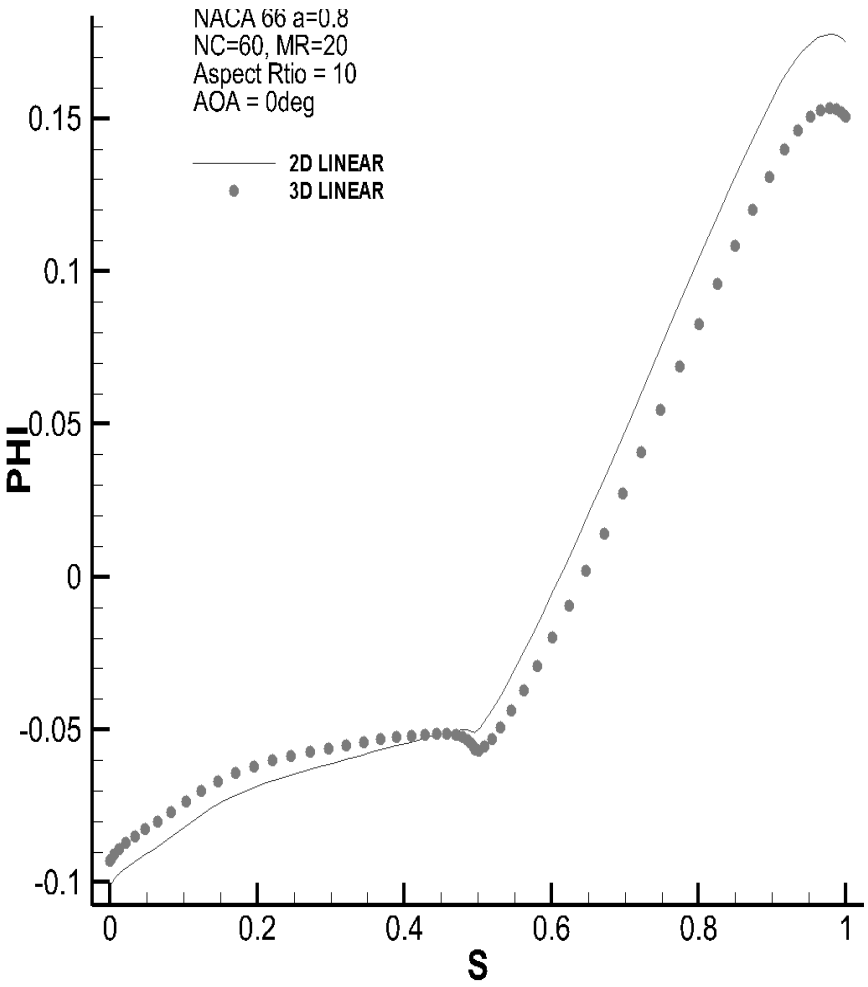

Fig. 5-28 Potential distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 66 a=0.8 t/c=0.1, f/c=0.04, N_c=60, M_r=20, α=0°)

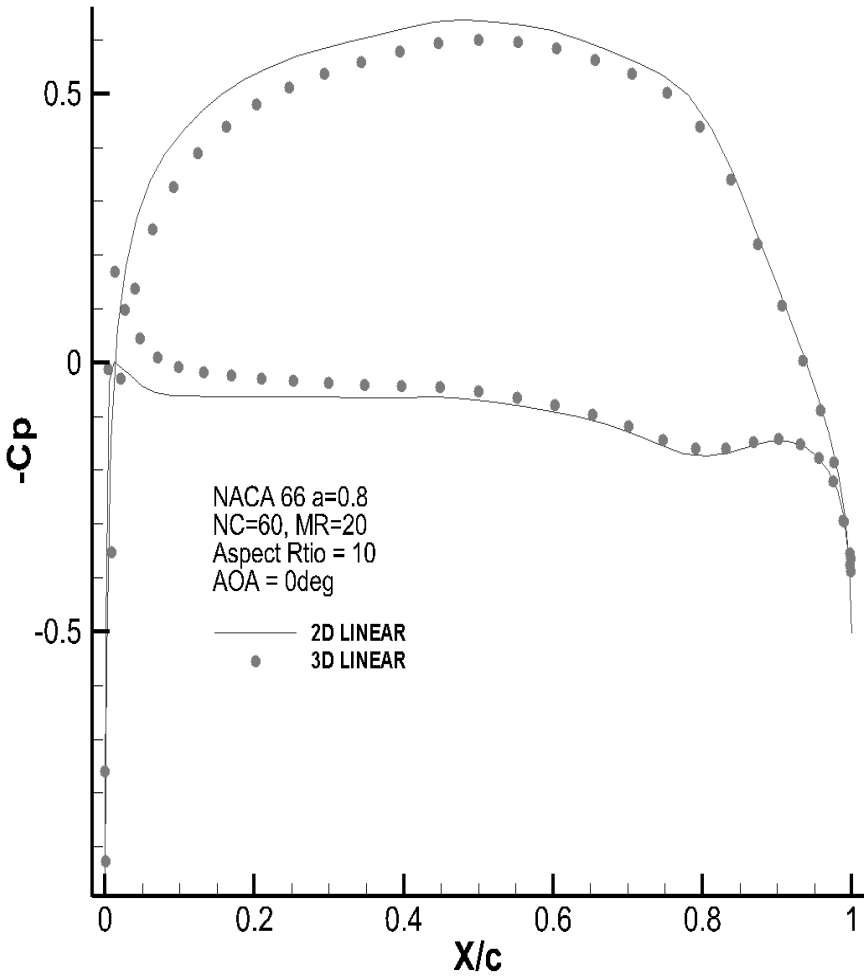

Fig. 5-29 $-C_p$ distribution for the high aspect ratio wing compared with 2D section(NACA 66 a=0.8 t/c=0.1, f/c=0.04, N_c=60, M_r=20, α=0°)

Fig. 5-24와 Fig. 5-25의 대칭 단면에 대한 2차원 단면의 결과와의 비교결과 매우 잘 일치하고 있음을 확인 할 수 있다. 하지만 대칭 단면에서 입사각이 있는 경우나 camber가 있는 단면의 경우에는 그 값에서 차이를 보인다.

Fig. 5-26의 대칭 단면의 입사각이 있을 경우의 포텐셜 값은 2차원과의 차이를 보인다. 하지만 Fig. 5-27의 $-C_p$값은 2차원과 잘 일치하고 있음을 확인 할 수 있다. 이는 포텐셜의 값 은 2차원 단면에 비해 작게 나오고 있지만 포텐셜의 기울기가 2차원과 일치하고 있음을 말한다.

Fig. 5-28의 camber가 있는 단면에 대한 포텐셜 값의 비교 결과를 보면 대칭 단면의 입사각이 있는 경우보다 더 많은 차이를 보이고 있다. 또한 Fig. 5-29의 $-C_p$에서 보듯이 특히 날개의 앞날에서의 결과가 많은 차이를 보이고 있다.

이렇듯 입사각이 존재하거나 camber가 있는 단면이 2차원 단면에 대한 결과와 차이를 보이는 것은 2차원과의 Kutta condition의 차이에 기인한 것으로 보여 진다. 2차원의 경우 날개 뒷날의 패널의 중앙에서 아래위 윗면의 속도가 같다는 Kutta 조건과 Morino의 Kutta 조건을 사용하는 반면 3차원의 경우 수정된 Morino의 Kutta 조건과 pressure Kutta 조건을 적용함으로 인한 차이에 기인하는 것으로 보인다.

5.3. 양력이 존재하는 원형 날개

계산 검증을 위한 마지막은 circulation이 존재하는 날개에 대한 계산이다. 프로펠러 팁 근처의 확대 된 흐름이 원형 날개 주변의 흐름과 유사하기 때문에 프로펠러 문제에 특히 중요하다.

Circulation이 존재하는 단면은 프로펠러에서 일반적으로 사용되는 NACA 단면을 사용하였다. 단면은 두께/chord 비가 0.01과 0.05인 NACA 0001과 NACA 0005, 두 단면에 대한 계산 결과를 비교하였다. 원형 날개의 양력을 계산하기 위해 날개에 유입되는 유동에 입사각을

주었고, 주어진 입사각은 5.73°이다. 계산 결과의 검증은 Jordan[8]의 두께가 영인 양력이 존재하는 원형 날개의 해석해와 비교하였다. 또한 Jordan 결과와의 비교를 통해 수렴성과 영 하중 조건의 만족 여부를 확인 하였다. 수렴성은 NACA 0001단면을 대상으로 진행하였다. Chord 방향 수렴성의 경우 M_r은 40개, span 방향의 수렴성의 경우 N_c를 40개로 고정 하였다. 좌표계는 Fig. 5-1과 같고 단면의 형상만 타원에서 NACA로 변경 되었다. Chord 방향과 span방향의 패널은 cosine 간격으로 배치하였다.

우선 각 방향별로 패널의 개수에 따른 영향을 Jordan의 결과와 비교하였다. Fig. 5-30은 chord방향의 패널의 개수에 따른 수렴성을 보여주고 있고, Fig. 5-31의 span방향 수렴성을 보여준다. 일반적이 원형 날개의 경우 span방향으로의 수렴이 천천히 진행되는 반면에 본 논문에서는 chord방향의 수렴이 더 늦게 수렴하는 현상을 보여 주고 있다. 이는 앞서 5.1.2절에 언급한 것과 같이 패널이 이루는 각의 수렴이 span방향보다 chord방향이 더 늦게 이루어진다고 판단된다. 각 방향별로 수렴가능 한 최소 패널은 chord방향으로 60개, span방향으로 40개가 요구 되어 진다.

일반적으로 원형 날개의 겨우 날개의 끝단에서 교차유동으로 인해 영 하중을 만족시키기 어렵다. 이를 해결하기 위해 앞서 3.5절에서 설명한 pressure Kutta 조건을 통해 영 하중을 만족시킬 수 있다. Fig.5-32에서 나타낸 날개 뒷날의 span방향의 압력차를 통해 pressure Kutta 조건이 정상적으로 작용 하여 영 하중을 만족 시켰음을 확인 할 수 있다. 하지만 Fig. 5-32에서 보듯이 날개의 끝단에서는 교차유동의 영향으로 다른 반경에 비해 그 값이 크게 나옴을 확인 할 수 있다. 또, 현재 적용된 pressure Kutta 조건은 매우 단순한 형태로써 수렴에 시간이 오래 걸리는 문제가 있다. 계산 시간을 단축하기 위해 정도를 낮추면 충분히 수렴하지 못하는 경우가 생기게 된다.

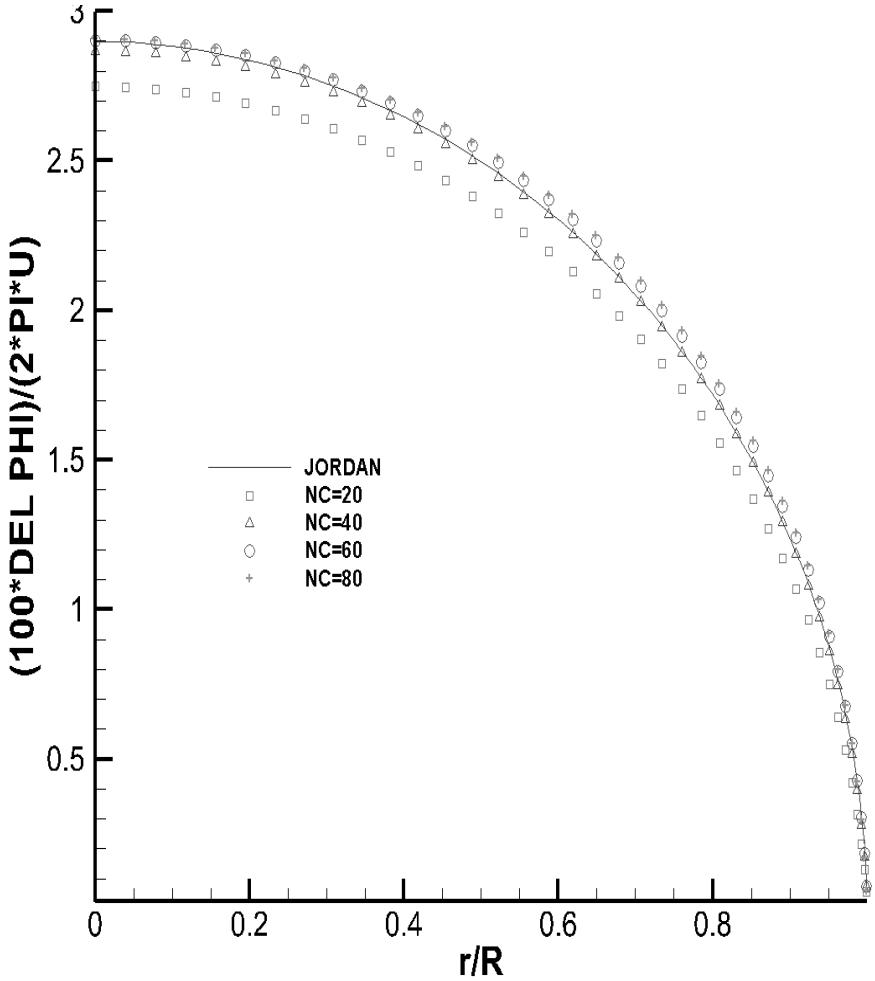

Fig. 5-30 Effect of the chord-direction number of panels on the circulation distribution of the circular wing(NACA 0001, α=5.73°)

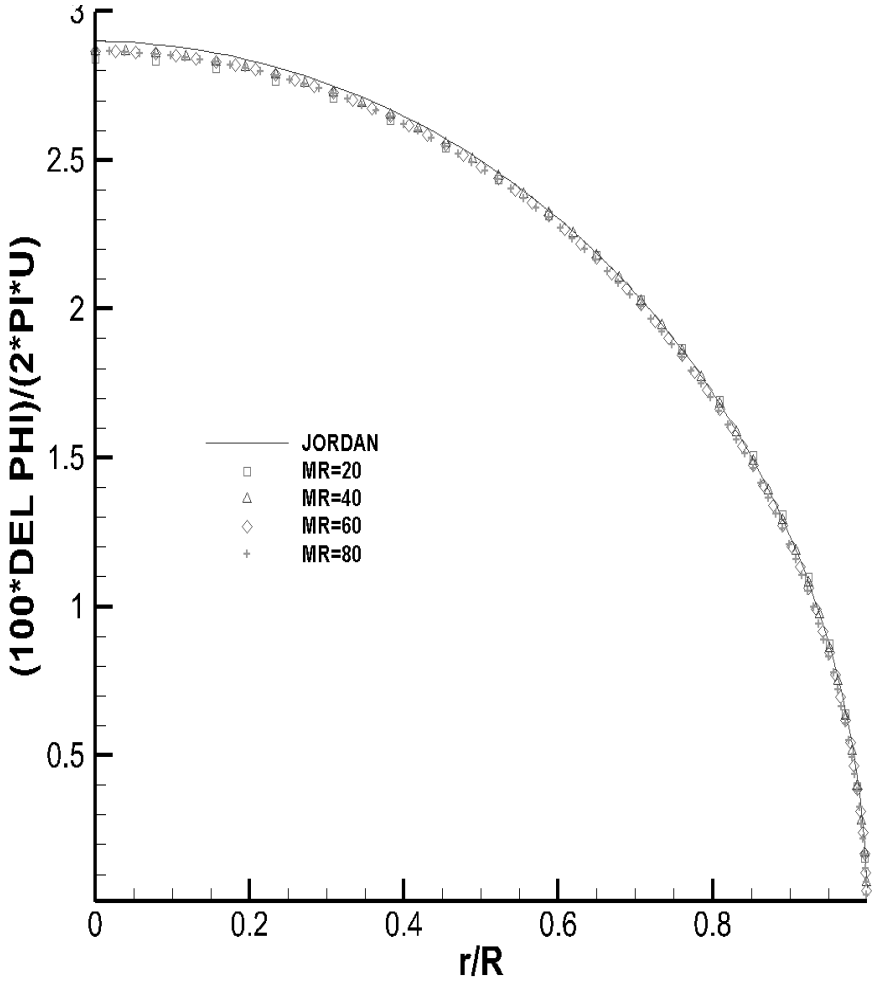

Fig. 5-31 Effect of the span-direction number of panels on the circulation distribution of the circular wing(NACA 0001, α=5.73°)

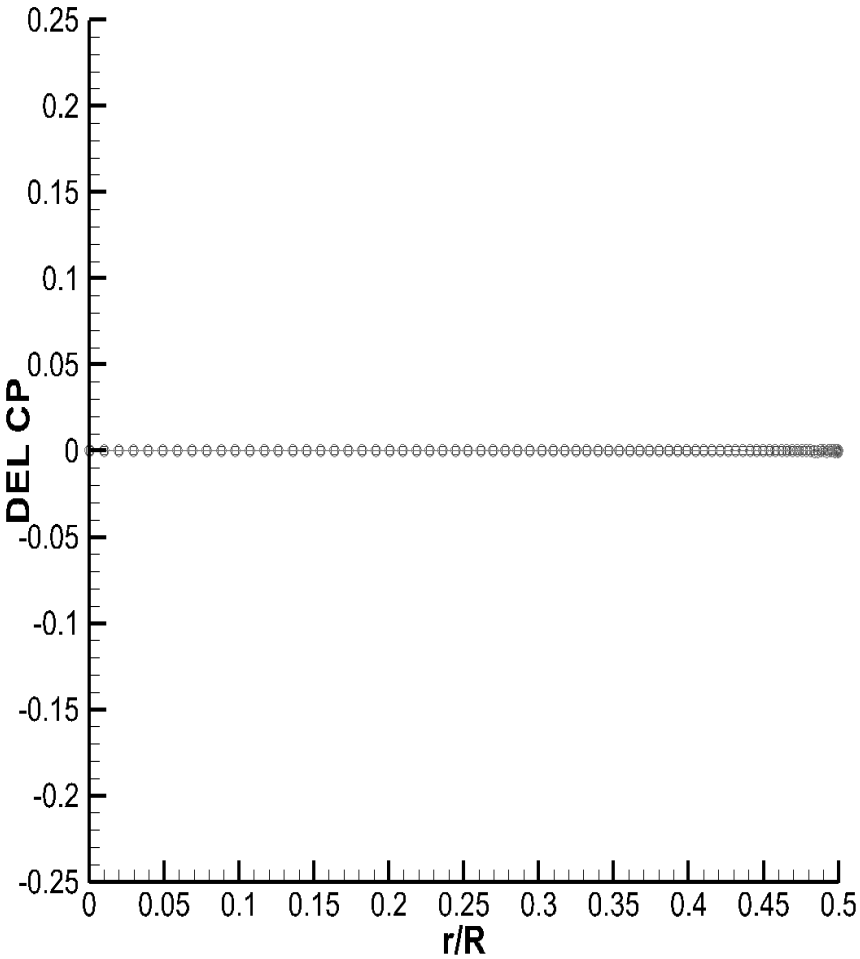

Fig. 5-32 Effect of the pressure Kutta condition on the span-direction $\triangle C_p$ of the circular wing(NACA 0001, α=5.73°)

6. 결론

본 논문은 삼각형 패널상에 다이폴의 강도를 선형적으로 분포 시켜 정식화 시키는데 있다. 삼각형 패널의 배치는 동일 반경상에 삼각형 패널을 서로 엇갈리게 배치하여 Green의 정리를 만족하는 밀폐된 형상을 만들었다. 특이점은 삼각형의 각 꼭짓점에 위치시켜 패널간 특이점 강도가 부드럽게 연결되도록 하였다. 제어점의 위치는 특이점의 위치와 일치시키고 날개의 뒷날에서는 Kutta 조건의 원활한 적용을 위해 패널의 변을 따라 날개의 앞날 방향으로 조금 이동시켜 배치하였다. 또한 날개 뒷날에서의 제어점을 이동시키면 미지수의 개수와 방정식이 개수가 같아져 기존의 Kutta 조건만으로도 문제의 정식화를 할 수 있었다.

3차원 문제에 대한 정식화에 앞서 2차원 문제에 대한 정식화를 통해 정식화 방법과 가정들의 타당성에 대해 검증을 진행하였다. 2차원 문제에 대해서는 기존의 균일 강도 패널법보다 좋은 결과를 얻을 수 있었고, 정식화 방법에 대한 이해도를 높일 수 있었다.

3차원 문제에 대한 정식화의 검증은 간단한 3차원 물체에 대해 진행하였다. 먼저 해석해가 존재하는 양력이 없는 원형 날개, 구와 타원체에 대해 진행하였고, 해석해와 비교 결과 해석해와 잘 일치함을 보였다. 이어서 세장비가 큰 날개에 대해 2차원의 결과와 비교를 진행 하였다. 2차원 결과와의 비교는 대체적으로 2차원 결과와 유사한 결과를 얻을 수 있었지만 입사각이 존재하거나 camber가 있는 단면을 갖는 날개의 경우 2차원과 약간의 차이를 보였다. 하지만 압력의 비교결과 그 영향은 미미함을 확인 할 수 있었다. 마지막으로 양력이 존재하는 원형 날개에 대해 계산을 진행하였고, Jordan[4]의 결과와 비교하였다. 비교결과 패널의 개수가 증가함에 따라 Jordan[4]의 결과에 수렴함을 확인할 수 있었다.

위의 검증 결과 본 논문에서 진행한 삼각형 패널상에 선형적으로 dipole의 강도가 분포하는 패널법의 정식화가 잘 이루어졌다고 판단된다.

참 고 문 헌

[1] A. van oosterom and J. strackee, “The solid angle of a panel triangle”, IEE transactions on biomedical engineering, vol, BME-30, no. 2, February 1983

[2] Brebbia, C.A. , Telles, J.C.F., Wrobel, L.C. , “Boundary element techniques”, Springer-verlag, 464p, 1984

[3] D.C. Camp, A.L. Van lehn, “Finite solid angle corrections for Ge(Li) detectors”, Nuclear instruments and methods, vol. 76, issue. 2, 1969

[4] Hoshino. T., “Hydrodynamic analysis of propeller in steady flow using a surface panel method”, Proceedings of the spring meeting No. 1-6, The society of naval architect of japan, 1989

[5] Hsin, C-Y., Development and analysis of panel methods for propellers in unsteady flow., Ph.D. thesis. Department of ocean engineering. M.I.T., 1990

[6] Hsin, C.-Y., Kerwin, J.E. , Newman, J.N. , “A two dimensional higher order panel method based on B-spline, theory and program documentation”, Department of ocean engineering, M.I.T.

[7] Iman aganj, Christophe lenglet, Guillermo sapiro, Essa yacoub, Kamil ugurbil, Noam harel, “Reconstruction of the orientation distribution function in single- and multiple-shell q-ball imaging within constant solid angle”, Magnetic resonance in medicine, vol. 64, issue. 2, 2010

[8] J.-C. Suh, J.-T. Lee, S.-B. Suh, “A bilinear source and doublet distribution over a planar and its applications to surface panel method”, 19th symposium on naval hydrodynamics office of naval research, pp. 839-847, 1992

[9] J.N. Newman, “distribution of source and normal dipoles over a quadrilateral panel”, journal of engineering mathematics, vol. 20, issue 2, pp. 113-126, 1986

[10] Jordan. P. F., “Exact solution for lifting surfaces”, AIAA J., Vol. 11, 1123-1129, 1973.

[11] Jack Moran, “An introduction to theoretical and computational aerodynamics”, Dover publisher, 1983

[12] Lee. J-T., “A potential based panel method for the analysis of marine propellers in steady flow” Ph.D. Thesis, Department of Ocean engineering . MIT. Cambridge. 1987.

[13] Maniar., H.D. , “A three dimensional higher order panel method based on B-spline”, Department of ocean engineering, M.I.T., Ph.D thesis, 1995

[14] Morino, L & Kuo, C.-C., “Subsonic potential aerodynamic for complex configurations : a general theory”, AIAA J. , 12(2), 191-197, Feb., 1974.

[15] Piegl, L. and Tiller, W. , “The NURBS book” 2nd edition, Springer, 1996

[16] Sir Horace Lamb, “Hydrodynamics”, Cambridge university press, sixth edition, 1932

[17] Suh, Jung-Chun, “Analytical evaluation of the surface integral in the singularity methods”, 대한조선학회 논문집 vol. 29, No.1, 1992

[18] Sypros, A. Kinnas, ching-yeh Hsin, “Boundary element method for the analysis of the unsteady flow around extreme propeller geometries”, AIAA journal, vol. 30, No. 3, 1992

[19] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, Baowei Song, “A fast method to realize the pressure Kutta condition in boundary element method for lifting bodies”, Jounal of ocean engineering, vol. 130, No. 15, pp. 398-406, 2017

[20] 김건도, “프로펠러 성능해석 향상을 위한 고차패널법의 적용”. 충남대학교 대학원 박사학위 논문, 2003

[21] 김동건, 한국일, 최준혁, 이장준, 김태국, “입체각 및 격자 세분화 방법을 이용한 복사형상계수 계산 연구”, 한국항공우주학회 학술발표회 초록집, pp. 745-748, 2013

[22] 김영기, “패널법에 의한 플펠러 주위 비정상 공동 유동 해석”, 충남대학교 대학원 박사학위 논문, 1995

[23] 문일성, 김영기, 이창섭, “포텐셜을 기저로한 패널법에 의한 프로펠러의 비정상 유동 해석”, 대한조선학회, 춘계학술발표대회, 331-336, 1994

[24] 박기덕, “부분 선형 패널법을 이용한 2차원 날개단면 주위 유동 해석”, 울산대학교 대학원 석사학위 논문, 2014

[25] 박기덕, 오진안, 이진태, “부분선형 패널법을 이용한 2차원 날개단면 주위 유동 해석”, 대한조선학회 논문집, vol. 52, No, 5, pp. 380-386, 2015

[26] 박일룡, 전호환, “고차경계요소법을 이용한 수중익에 대한 3차원 조파문제 해석”, 대한조선학회 논문집, vol. 35, No. 3, pp. 14-25, 1998

[27] 백광준, 서성부, 전호환, “고차경계요소법을 이용한 정상 유동중의 프로펠러 해석”, 대한조선학회 논문집, vol. 38, No. 3, pp. 31-40, 2001

[28] 오진안, 이진태, “패널법과 전산유동해석법의 결합을 이용한 날개단면 주위 점성유동 해석”, 대한조선학회 논문집, vol. 50, No. 2, pp. 355-363, 2013

[29] 이동현, “2차원 날개 단면 주위의 정상유동해석 향상을 위한 B-spline 및 부분 선형 패널법의 적용”, 울산대학교 대학원 석사학위 논문, 2018

[30] 이창섭, 서정천, “쌍곡면 패널에의 다이폴 분포”, 대한조선학회 논문집 vol. 32, No, 2, 1995

[31] 조충호, 이창섭, “2차원 B-스플라인 기저 고차패널법의 수치실험”, 대한조선학회 논문집, vol. 37, No. 3, pp. 27-36, 2000

[32] 최교환, 임제탁, 김선일, “입체각을 이용한 관골구와 대퇴골두의 접촉영역의 측정”, 대한저자공학회 전자공학논문지-S, vol. 35, No. 2, pp. 227-236, 1998

[33] 홍사영, 최항순, “고차경계요소법에 의한 선체주위 유동해석”, 대한조선학회 논문집, vol. 32, No. 1, pp. 42-57, 1995

부록 A

영향 계수의 유도

제어점 P에 대해, 식 (2.10)을 2차원의 형태로 표현 하면 다음과 같다.

$$-\pi\phi(p) = \int_{S_B} [\phi(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q) - \frac{\partial\phi(q)}{\partial n_q}\log R(p;q)]ds + \int_{S_W} \triangle\phi(q)\frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q)ds \quad \text{(A.1)}$$

여기서, 3차원 Green 함수, $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}$ 는 2차원 Green 함수 $\frac{1}{2\pi}\log R$로 대체되고, 면적분은 선적분이 된다.

식 (A.1)을 다이폴과 쏘스로 나누어 각각에 대한 영향 계수를 유도하였다. 다이폴 항은 식 (A.1)의 첫 번째 항이고, 쏘스 항은 두 번째 항이다.

$$\phi_D(p) = \int_{S_B} \frac{\partial}{\partial n_q}\log R(p;q)\, ds \quad \text{(A.2)}$$

$$\phi_S(p) = \int_{S_B} \log R(p;q)\, ds \quad \text{(A.3)}$$

여기서, ϕ_D는 다이폴에 의한 영향 계수이고, ϕ_S는 쏘스에 의한 영향 계수이다.

A.1 특이점의 강도가 균일하게 분포한 경우

패널에 걸쳐 균일한 강도를 갖는 다이폴에 의한 영향 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{d,c} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{\partial}{\partial \eta} \log[(tx-\xi)^2+(ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{-2(ty-\eta)}{(tx-\xi)^2+(ty-\eta)^2} d\xi, \ (\eta \to 0) \\
&= \left[(\tan^{-1}(\frac{tx-\xi}{ty}) \right]_0^D \\
&= \tan^{-1}(\frac{tx-D}{ty}) - \tan^{-1}(\frac{tx}{ty}) \\
&= \theta_2 - \theta_1
\end{aligned} \tag{A.4}$$

이어서 쏘스에 의한 영향 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi_{s,c} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \log[(tx-\xi)^2+(ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} d\xi, \ (\eta \to 0) \\
&= -\frac{1}{2}[(tx-\xi)*\log[(tx-\xi)^2+ty^2]+2ty*\tan^{-1}(\frac{tx-\xi}{ty})-2(tx-\xi)] \\
&= -\left[(tx-D)\log[(tx-D)^2+ty^2]^{\frac{1}{2}} + ty*\tan^{-1}(\frac{tx-D}{ty}) - (tx-D) \right]_0^D \\
&\quad + [tx*\log[tx^2+ty^2]^{\frac{1}{2}} + ty*\tan^{-1}(\frac{tx}{ty}) - tx] \\
&= tx*(\log(R1/R2)) + D(\log R2 - 1) - ty*dph
\end{aligned} \tag{A.5}$$

여기서,

$$R1 = \sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2}$$

$$R2 = \sqrt{(x-\xi_2)^2+(y-\eta_2)^2}$$

A.2 특이점의 강도가 선형적으로 분포한 경우

패널에 걸쳐 선형적으로 강도를 갖는 다이폴은 Fig. 4-1와 Fig. 4-2에 보인바와 같이 패널 양 끝의 절점에 다이폴이 존재하고, 다이폴에 의한 영향은 다른 절점에서 강도가 영이 된다. 그러므로 다이폴에 의한 영향 계수를 계산 할 때는 패널의 두 절점으로부터의 영향을 각각 구해야 한다. 패널의 오른쪽에 다이폴이 존재할 때를 D.R , 왼쪽에 존재할 때를 D.L 이라고 명명하였다.

먼저 패널의 오른쪽에 다이폴이 존재할 경우(D.R)에 대한 영향 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi_{D.R} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{\xi}{D}\frac{\partial}{\partial\eta}\ln[(tx-\xi)^2+(ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}dxi, \eta\to 0 \\ &= \int_{\xi=0}^{\xi=D} \frac{\xi}{D}\frac{-ty}{(tx-\xi)^2+ty^2}d\xi\end{aligned} \tag{A.6}$$

다음으로 치환적분을 사용하기 위한 새로운 적분변수를 설정한다.

$$\begin{aligned}&tx-\xi = X\to\xi = tx-X \\ &ty = Y \\ &d\xi = -dX \\ &d(ty) = dY\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{D.R} &= \int_{X=tx}^{X=tx-D}\frac{(tx-X)}{D}\frac{-Y}{X^2+Y^2}(-dX) \\ &= \frac{1}{D}\int_{tx}^{tx-D}\frac{(tx-X)Y}{X^2+Y^2}dX \\ &= \frac{1}{D}\int_{tx}^{tx-D}\frac{txY}{X^2+Y^2}dX-\frac{1}{D}\int_{tx}^{tx-D}\frac{XY}{X^2+Y^2}dX \\ &= \frac{txY}{D}\int_{tx}^{tx-D}\frac{1}{X^2+Y^2}dX-\frac{Y}{D}\int_{tx}^{tx-D}\frac{X}{X^2+Y^2}dX \\ &= \frac{txY}{D}[\frac{1}{Y}\tan^{-1}(\frac{X}{Y})]_{tx}^{tx-D}-\frac{Y}{D}[\frac{1}{2}\ln(X^2+Y^2)]_{tx}^{tx-D} \\ &= \frac{1}{D}[tx(\theta_2-\theta_1)-ty\ln(\frac{R_1}{R_2})]\end{aligned} \tag{A.7}$$

이어서 패널의 오른쪽에 다이폴이 존재할 경우(D.L)에 대한 영향 계수를 구한다. 구하는 방법은 D.R과 같다.

$$\begin{aligned}\phi_{D.L} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D}(1-\frac{\xi}{D})\frac{\partial}{\partial\eta}\ln[(tx-\xi)^2+(ty-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}dxi,\ \eta\rightarrow 0 \\ &= \int_{\xi=0}^{\xi=D}\frac{ty}{D}\frac{\xi}{(tx-\xi)^2+ty^2}d\xi-\int_{\xi=0}^{\xi=D}\frac{ty}{(tx-\xi)^2+ty^2}\end{aligned} \tag{A.8}$$

치환을 위한 적분변수는 D.R의 변수와 같다.

$$\begin{aligned}\phi_{D.L} &= \int_{\xi=0}^{\xi=D}\frac{ty}{D}\frac{\xi}{(tx-\xi)^2+ty^2}d\xi-\int_{\xi=0}^{\xi=D}\frac{ty}{(tx-\xi)^2+ty^2} \\ &= \frac{Y}{D}\int_{tx}^{tx-D}\frac{tx-X}{X^2+Y^2}(-dX)+Y\int_{tx}^{tx-D}\frac{1}{X^2+Y^2}dX\end{aligned} \tag{A.9}$$

여기서, 우변의 첫 번째 항은 D.R과 같으므로 두 번째 항만 기술한다.

$$Y\int_{tx}^{tx-D}\frac{1}{X^2+Y^2}dX = Y[\frac{1}{Y}\tan^{-1}(\frac{X}{Y})]_{tx}^{tx-D}=\theta_2-\theta_1 \tag{A.10}$$

첫 번째 항과 두 번째 항을 더하여 최종적인 영향 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\phi_{D.L}=(\theta_2-\theta_1)(1-\frac{ty}{D})+\frac{ty}{D}\ln(\frac{R_2}{R_1}) \tag{A.11}$$

부분 선형 패널법에서 쏘스의 강도는 균일하게 분포한다고 가정하였기에 균일 강도 패널법의 쏘스에 의한 영향 계수와 같다.

부록 B

영향 계수의 확인

패널에 선형으로 분포하는 다이폴에 의한 영향 계수를 검증하기 위해 서로 다른 균일한 다이폴 강도를 가진 패널을 마치 선형적으로 강도가 증가되는 것처럼 인접하게 위치시켰다.

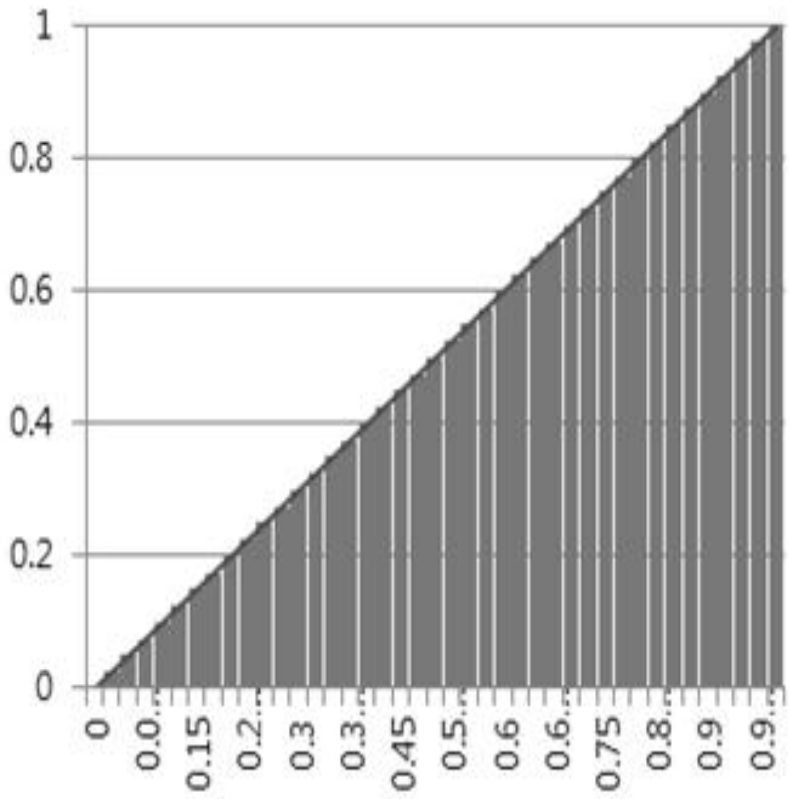

Fig. B1 Equivalent representation of numerous constant strength panels for a linear strength panel

다이폴의 강도가 선형적으로 분포되어 있는 패널과 일정한 단일 패널에 대하여 제어점을 원형으로 배치시켜 각각의 강도 분포에 의해 계산된 유기 포텐셜을 값을 비교하였다. 우선 패널의 오른쪽에 다이폴이 존재할 경우에 대한 결과를 보였다.

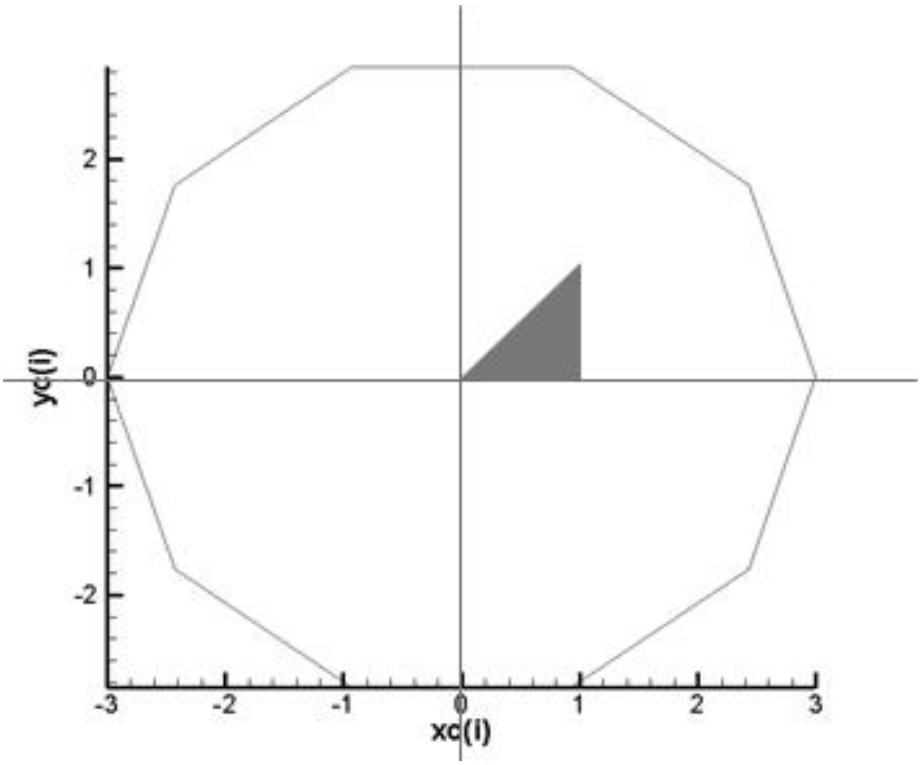

Fig. B2 Arrangement of panel and control points, with right side dipole strength

결과 값은 Table B1에 나타내었다. 다이폴의 강도가 균일할 때와 선형적으로 분포할 때의 결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 균일한 다이폴 강도를 갖는 패널의 개수가 늘어날수록 다이폴의 강도가 선형적으로 분포하는 패널에 의한 영향 계수 계산 결과와의 차이가 줄어듦을 확인하였다.

Table B1 Comparison of dipole influence coefficient by constant strength and linear strength panels with right side dipole strength

	X_C	Y_C	$\phi_{D,con}$	$\phi_{D,lin}$
1	3.000	0.000	0.00E+00	0.00E+00
2	2.430	-1.760	2.28E-0.2	2.28E-0.2
3	0.927	-2.850	2.75E-0.2	2.75E-0.2
4	-0.927	-2.850	2.13E-0.2	2.12E-0.2
5	-2.430	-1.760	1.12E-0.2	1.12E-0.2
6	-3.000	0.000	0.00E+00	2.07E-08
7	-2.430	1.760	-1.12E-0.2	-1.12E-0.2
8	-0.927	2.850	-2.13E-0.2	-2.12E-0.2
9	0.927	2.850	-2.75E-0.2	-2.75E-0.2
10	2.430	1.760	-2.28E-0.2	-2.28E-0.2
11	3.000	0.000	0.00E+00	0.00E+00

이어서 패널의 좌측에 다이폴이 존재할 경우에 대한 결과이다.

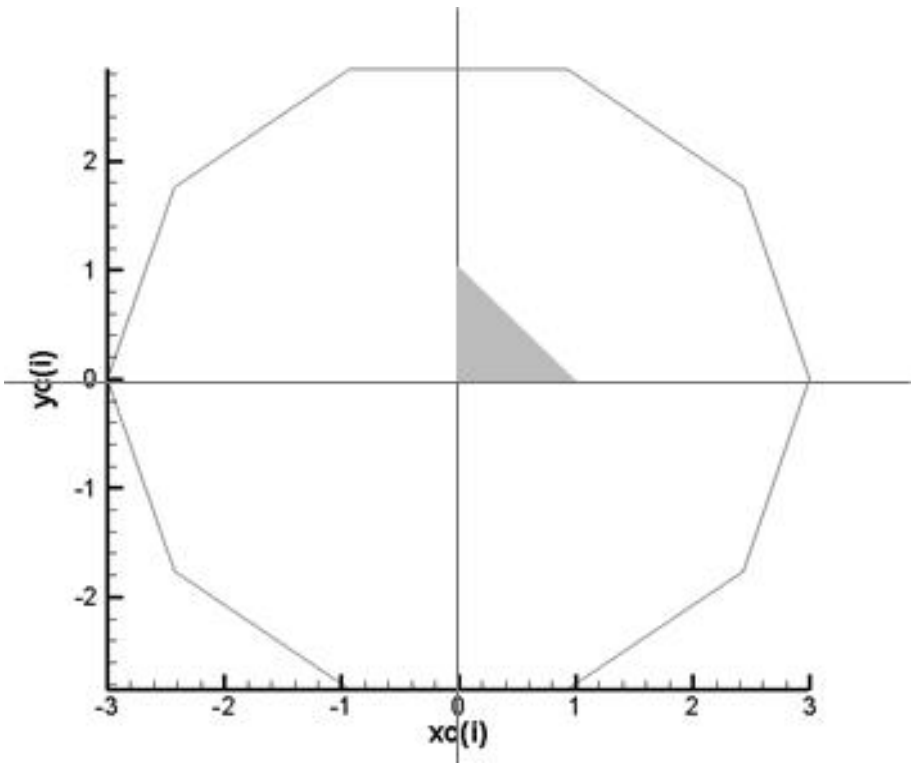

Fig. B3 Arrangement of panel and control points with left side dipole strength

계산 결과는 Table B2에 나타내었다. 다이폴이 패널의 오른쪽에 있는 경우처럼 다이폴이 균일하게 분포하는 경우와 선형적으로 분포하는 경우의 결과가 거의 일치함을 알 수 있었다.

Table B2 Comparison of dipole influence coefficient by constant strength and linear strength panels with left side dipole strength

	X_C	Y_C	$\phi_{D,con}$	$\phi_{D,lin}$
1	3.000	0.000	0.00E+00	0.00E+00
2	2.430	-1.760	2.28E-0.2	2.28E-0.2
3	0.927	-2.850	2.75E-0.2	2.75E-0.2
4	-0.927	-2.850	2.13E-0.2	2.12E-0.2
5	-2.430	-1.760	1.12E-0.2	1.12E-0.2
6	-3.000	0.000	0.00E+00	2.07E-08
7	-2.430	1.760	-1.12E-0.2	-1.12E-0.2
8	-0.927	2.850	-2.13E-0.2	-2.12E-0.2
9	0.927	2.850	-2.75E-0.2	-2.75E-0.2
10	2.430	1.760	-2.28E-0.2	-2.28E-0.2
11	3.000	0.000	0.00E+00	0.00E+00

상기의 두 계산결과로 보아 다이폴이 선형적으로 분포하는 패널의 영양 함수가 타당하다는 것을 알았다.

부록 C

해석해

C.1 원의 해석

원의 포텐셜 값은 다음과 같은 수식을 사용하여 구할 수 있다.

$$\phi = U\frac{r_0^2}{r}\cos(\theta-\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{C.1}$$

위의 수식에서 포텐셜, ϕ는 섭동 속도 포텐셜이다. 여기서, Γ는 $r = r_0$ 그리고 $u_r = 0$일 때 Kutta 조건을 적용하여 $\theta = 0$이면 $u_\theta = 0$이므로 $\Gamma = -4\pi U r sin\alpha$가 된다. 또, α는 유체의 입사각이다.

속도는 교란속도와 유입속도의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_r &= U cos(\theta-\alpha)(1-\frac{r_0^2}{r^2}) \\ u_\theta &= -U sin(\theta-\alpha)(1+\frac{r_0^2}{r^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ &= -2U sin(\theta-\alpha) - 2U sin\alpha \\ &= -2(\sin(\theta-\alpha)+\sin\alpha) \end{aligned} \tag{C.2}$$

압력계수는 베르누이 방정식을 이용하여 구할 수 있다.

$$C_p = \frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \tag{C.3}$$

C.2 Karman-Trefftz 변환

Karman-Trefftz 변환의 경우 원의 형상을 날개 단면의 형상으로 변환시키면서 원 주변의 압력도 같이 변환시키므로, 변환에 의해 얻어진 압력의 값은 변환되어진 날개 단면의 해석해라고 보아도 무방하다.

Karman-Trefftz 변환은 한 점 z에서 다른 한 점 ζ로 다음의 관계식을 이용하여 변환시키는 것이다.

$$\zeta = \frac{\lambda a[(z+a)^{\lambda} + (z-a)^{\lambda}]}{(z+a)^{\lambda} - (z-a)^{\lambda}} \tag{C.4}$$

여기서, λ와 a의 값은 상수의 값으로 주어진다.

위의 관계식을 미분 하게 되면 z 평면의 속도를 ζ 평면으로 변환시킬 수 있다.

$$\frac{d\zeta}{dz} = 4\lambda^2 a^2 \frac{[(z-a)^{\lambda-1}(z+a)^{\lambda-1}]}{[(z+a)^{\lambda} - (z-a)^{\lambda}]^2} \tag{C.5}$$

C.3 양력이 없는 3차원 원형 날개에 대한 해석해

양력이 없는 원형 날개의 각 축의 반경을 a, b 그리고 c라 하고, 유입 속도는 x 축과 평행이고, $\vec{U}_\infty$라 정의 한다.

양력이 없는 원형 날개는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(C.6)}$$

양력이 없는 원형 날개의 표면에서의 포텐셜의 표현은 Lamb[16]에 의해 주어진다.

$$\phi(x,y,z) = \vec{U}_\infty x K \qquad \text{(C.7)}$$

여기서,

$$K=\frac{abc}{2-\alpha_0}D$$

$$D=\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{1/2}}$$

$$\alpha_0 = abcD$$

수식 (C.7)의 적분은 수치적분을 사용하여 구할 수 있다.

유입속도 $\vec{U}_\infty$=1로 두고, 물체의 반경 a와 b를 1로 두면 식 (C.6)은 다음과 같다.

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(C.8)}$$

양력이 없는 날개의 표면에서의 속도는 Lee[2]에 의해 잘 정리되어 있고, 다음과 같이 구할 수 있다.

먼저 Fig. 5-1에 표시한 방향(u-v방향)으로 표면에서의 속도를 구하기 위해서 다음과 같이 변환한다.

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \eta = y \tag{C.9}$$

식 (C.9)을 식 (C.8)에 적용하면 담음과 같다.

$$\xi^2(1-\eta^2)+\eta^2+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{C.10}$$

연쇄법칙을 사용하면 u방향 속도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial u/\partial x}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{du}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx}} \tag{C.11}$$

여기서, du는 $y=\eta=\eta_0$일 때, 물체 호의 길이이고, 다음과 같다.

$$du=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \tag{C.12}$$

식 (C.12)를 사용하여 x와 z를 구하면 다음과 같다.

$$x=\sqrt{1-\eta_0^2}\,\xi=l_0\xi \qquad z=cl_0\sqrt{1-\xi^2} \tag{C.13}$$

그리고 $\dfrac{du}{d\xi}$는 다음과 같이 표현 된다.

$$\frac{du}{d\xi} = l_0 \sqrt{1 + \frac{c^2 \xi^2}{1 - \xi^2}}$$
$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l_0} \tag{C.14}$$

최종적으로 u방향의 속도를 구하는 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{c^2 \xi^2}{1 - \xi^2}}} = K \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 - (1 - c^2)\xi^2}} \tag{C.15}$$

v방향의 속도는 u방향의 속도를 구하는 방법으로 구할 수 있다.

Abstract

A high-order potential-based panel method based on Green's theorem, with piecewise-linear dipole strength on triangular panels, is formulated for the analysis of potential flow around a three-dimensional wing. Previous low-order panel methods adopt square panels with piecewise-constant dipole strength, which results in inherent errors.

Square panels cannot represent a high curvature lifting body, such as propellers, since the four vertices of the square panel do not locate at the same flat plane. Moreover the piecewise-constant dipole strength induces inevitable errors due to the steps in dipole strength between adjacent panels.

In this paper a high-order panel method is formulated to improve accuracy by adopting a piecewise linear dipole strength on triangular panels. Firstly, the square panels are replaced by triangular panels in order to increase the geometric accuracy in representing the shape of the object with large curvature. The projection of square panels to a mean plane is not required since triangular panels locate on a flat plane. This would reduce the possible error caused by geometric projection of the square panel. Next, the step difference of the dipole strength between adjacent panels is removed by adopting piecewise-linear dipole strength on the triangular panels. The dipole strength is defined at the vertex of the triangular panel so that the singularity strength is distributed linearly without the step difference through out the triangular panels representing a twisted geometry.

Formulation of a two-dimensional panel method is performed to check the improvement of the accuracy compared to those

by the low-order method with constant dipole strength panel. Then formulation of the three-dimensional panel method is performed. Control points, where the Green's identity are satisfied, are located at vertices in the present method, compared to the centroid of the square panel in the low-order panel method. Sample calculation is carried out for simple geometries and results are compared with analytic solutions, in order to verify the formulation.

Sphere and ellipsoid at zero angle-of-attack are chosen for sample calculation. Calculation results coincide the analytic values with resonable accuracy. Circular wing at angle-of-attack is chosen to confirm the formulation for the lifting problem. It is confirmed that Morino's Kutta condition do not provide the pressure matching at the trailing edge near the tip of the circular wing, where cross-flow around the tip is large. A pressure kutta condition is formulated in order to reduce the pressure difference at the trailing edge. Calculated results for a thin foil follow the Jordan's analytic results for zero thickness circular wing.